8. POVRŠINSKI INTEGRAL DRUGE VRSTE

PREGLED TEORIJE

8.1. Neka je S komad glatke površi. Tada su u svakoj tački $T \in S$ određena dva jedinična vektora normale na S, koji su međusobno suprotni. Kaže se da je površ S dvostrana ako se u svakoj tački T površi S može odabrati jedinični vektor normale tako da kad tačka T putuje po S, vektor normale se neprekidno mijenja. U protivnom slučaju površ S je jednostrana. Primjer jednostrane površi je Mebiusova (Möbius) traka.

Primjeri dvostranih površi su ravan, sfera itd.

Kad se u svakoj tački T dvostrane glatke površi S na opisani način izvrši izbor jediničnog vektora normale $\vec{N}$, tada se kaže da je površ S orijentisana. Za svaku takvu površ postoje samo dvije orijentacije koje su međusobno suprotne. Kod zatvorenih dvostranih površi orijentacija se obično vrši vektorom vanjske normale.

Neka je S po dijelovima glatka površ a $S_1, \ldots, S_n$ podjela površi S na glatke komade. Ako su svi komadi S_i dvostrani, tada za svaku orijentaciju komada S_i imamo usklađenu orijentaciju ruba C_i. Za svaki izbor orijentacija komada S_i imamo samo ove dvije mogućnosti: 1) Za svaka dva komada S_i, S_j eventualni zajednički dio rubova C_i, C_j ima kao dio ruba C_i suprotnu orijentaciju onoj koju ima kao dio ruba C_j i 2) Postoje bar dva komada S_i i S_j takva da zajednički dio rubova C_i i C_j ima istu orijentaciju kao dio ruba C_i koju ima kao dio ruba C_j. U prvom slučaju kažemo da je površ S dvostrana, a svaki izbor orijentacija komada S_i za koji vrijedi 1) zovemo orijentacija površi S. Dvostrana po dijelovima glatka površ ima tačno dvije orijentacije koje su jedna drugoj suprotne.

8.2. Ako je S orijentisana površ, a C jednostavno zatvorena orijentisana kriva na S, onda se kaže da je orijentacija krive C pozitivna ili da je u skladu sa orijentacijom površi S, ako nam kod kretanja po krivoj C u smjeru njene orijentacije dio površi S ograničen krivom C ostaje sa lijeve strane (gledano sa one strane površi S u koju je usmjeren njen vektor normale).

8.3. Neka je S ograničen komad po dijelovima glatke orijentisane površi, a

$$\vec{F} = \vec{F}(T) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k} \tag{1}$$

ograničena vektorska funkcija na S, $T(x, y, z) \in S$.

Za svaku podjelu $S_1, S_2, \ldots, S_n$ komada S odabraćemo tačke $T_i \in S_i$ i u svakoj od ovih tačaka jedinični vektor normale

$$\vec{N}_i = \vec{i} \cdot \cos\alpha(T_i) + \vec{j} \cdot \cos\beta(T_i) + \vec{k} \cdot \cos\gamma(T_i). \tag{2}$$

Za tu podjelu i za taj izbor tačaka formirajmo integralnu sumu

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}(T_i) \cdot \vec{N}_i\, p(S_i). \tag{3}$$

Ako postoji konačna granična vrijednost

$$I = \lim_{\max d(S_i) \to 0} \sigma_n, \tag{4}$$

tada se ta granična vrijednost zove površinski integral druge vrste funkcije (1) po orijentisanoj površi S i označava ovako:

$$I = \iint_S \vec{F}(T) \cdot \vec{N}\, dS = \iint_S \vec{F}(T) \cdot d\vec{S} \tag{5}$$

Kako vidimo, površinski integral druge vrste funkcije (1) po orijentisanoj površi S koja ima jedinični vektor normale

$$\vec{N} = \vec{i} \cos\alpha(T) + \vec{j} \cdot \cos\beta(T) + \vec{k} \cdot \cos\gamma(T) \qquad (T \in S) \tag{6}$$

isto je što i površinski integral prve vrste funkcije

$$\vec{F}(T) \cdot \vec{N}(T) = P(x, y, z) \cdot \cos\alpha(x, y, z) + Q(x, y, z) \cdot \cos\beta(x, y, z) + R(x, y, z) \cdot \cos\gamma(x, y, z) \tag{7}$$

po površi S. Otuda se odmah izvode osobine i način izračunavanja površinskih integrala druge vrste.

Za integral (5) upotrebljava se i oznaka

$$I = \iint_S P(x, y, z)\, dydz + Q(x, y, z)\, dzdx + R(x, y, z)\, dxdy. \tag{5'}$$

8.4. Površinski integral (5) predstavlja protok ili fluks vektora (1) kroz orijentisanu površ S. U slučaju da je ta površ zatvorena, piše se

$$I = \oiint_S \vec{F}(T) \cdot d\vec{S}. \tag{8}$$

Ako je S rub oblasti V orijentisan vektorom vanjske normale, a funkcija (1) ima neprekidne komponente sa neprekidnim prvim parcijalnim izvodima $\dfrac{\partial P}{\partial x}$, $\dfrac{\partial Q}{\partial y}$ i $\dfrac{\partial R}{\partial z}$ na oblasti V, tada vrijedi

$$\oiint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \operatorname{div}(\vec{F})\, dV. \tag{9}$$

Pri tome se S može sastojati iz jedne ili iz više jednostavno zatvorenih orijentisanih po dijelovima glatkih površi. Za svaku od tih površi odabran je u svakoj njenoj tački jedinični vektor normale $\vec{N}$ koji je usmjeren izvan oblasti V. Formula (9), koja površinski integral funkcije $\vec{F}$ po zatvorenoj površi S prevodi u trostruki integral funkcije $\operatorname{div}(\vec{F})$ po oblasti V ograničenoj tom površi, zove se formula Gausa (Gauss) i Ostrogradskog. Ona je jedan od prostornih analogona Grinove formule (Drugi je Stoksova formula, v. T. 8.7.).

8.5. Ako je polje $\vec{F}$ solenoidalno u oblasti V čiji se rub S sastoji iz jedne jednostavno zatvorene površi S_0 i nekoliko jednostavno zatvorenih površi $S_1, \ldots, S_n$ koje sve leže unutar S_0, a ni dijelom nisu sadržane jedna unutar druge, tada za svaku jednostavno zatvorenu po dijelovima glatku površ S' koja sva leži u V, a obuhvata upravo površi $S_1 \ldots, S_r$, vrijedi

$$\oint\!\!\!\oint_{S'} \vec{F}\cdot d\vec{S} = \sum_{i=1}^{r} \oint\!\!\!\oint_{S_i} \vec{F}\cdot d\vec{S}. \tag{10}$$

Pri tome se uzima da su sve ove površi orijentisane vektorom vanjske normale (koji je usmjeren izvan dotične površi). Ukoliko S' ne obuhvata ni jednu od površi $S_1, \ldots, S_n$, tada je desna strana relacije (10) jednaka 0.

8.6. Neka je na oblasti V čiji se rub S sastoji iz jedne jednostrano zatvorene površi (jednostavno povezana oblast) zadano solenoidalno polje $\vec{F}$. Tada za svaku jednostavno zatvorenu orijentisanu krivu C i za svake dvije orijentisane površi S_1 i S_2 koje leže u V, a imaju zajednički rub C vrijedi

$$\iint_{S_1} \vec{F}\cdot d\vec{S} = \iint_{S_2} \vec{F}\cdot d\vec{S}. \tag{11}$$

Pri tome se pretpostavlja da je orijentacija svake od površi S_i u skladu sa orijentacijom zajedničkog ruba C. Tako svaki od ova dva integrala zavisi samo od zajedničkog ruba C, a ne i od samih površi S_1 i S_2. Zapravo je svaki od ovih integrala jednak krivolinijskom integralu po krivoj C vektorskog potencijala $\vec{G}$ polja $\vec{F}$, kako se vidi iz sljedeće tačke.

8.7. Neka je S komad po dijelovima glatke orijentisane površi, a C po dijelovima glatki orijentisani rub te površi. Rub C može se sastojati iz jedne ili više jednostavno zatvorenih krivih, ali je orijentacija ruba u skladu sa orijentacijom površi S. Tada za svaku vektorsku funkciju (1) koja ima neprekidne komponente P, Q i R sa neprekidnim prvim parcijalnim izvodima (u nekoj oblasti V u kojoj leži S) vrijedi

$$\oint_{C} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \iint_{S} \operatorname{rot}(\vec{F})\cdot d\vec{S}. \tag{12}$$

Formula (12) uz učinjene pretpostavke prevodi površinski integral druge vrste funkcije rot $\vec{F}$ po orijentisanoj površi S u krivolinijski integral funkcije $\vec{F}$ po rubu C čija je orijentacija u skladu sa orijentacijom površi S. Ta formula zove se Stoksova (Stokes) formula.

8.8. Neka je zadano vektorsko polje $\vec{F}$ u oblasti V koja je površinski povezana, tj. koja ima osobinu da za svaku jednostavno zatvorenu po dijelovima glatku krivu C iz V postoji po dijelovima glatka orijentisana površ S koja leži u V i ima rub C. Neka su komponente P, Q i R, kao i njihovi prvi parcijalni izvodi, neprekidne funkcije na V. Tada su međusobno ekvivalentni sljedeći uslovi:

1) Za svaku jednostavno zatvorenu po dijelovima glatku krivu C iz V

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0;$$

2) Za svake dvije tačke $A, B \in V$ i svaku po dijelovima glatku spojnicu $\widehat{AB}$ koja leži u V

$$\int_{\widehat{AB}} \vec{F} \cdot d\vec{r} \text{ zavisi samo od krajnjih tačaka } A \text{ i } B;$$

3) Polje $\vec{F}$ je potencijalno, tj. postoji skalarni potencijal $U(x, y, z)$ polja $\vec{F}$;

4) $\operatorname{rot}(\vec{F}) = \vec{O}$ na (V).

Ako je ispunjen neki od ovih uslova, tada se skalarni potencijal $U(x, y, z)$ računa po formuli

$$U(x, y, z) = \int_{\widehat{AB}} \vec{F} \cdot d\vec{r},$$

gdje je $A(x_0, y_0, z_0)$ fiksna, a $B(x, y\ z)$ promjenljiva tačka unutar V.

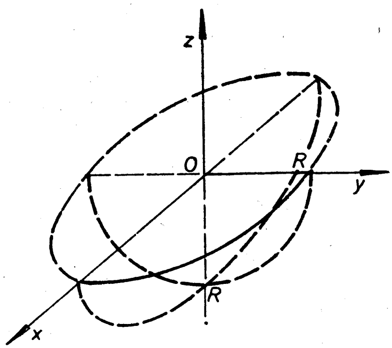
Izračunati integral:

369. $I=\iint\limits_S x^2 y^2 z\,dx\,dy$, gdje je S gornja strana donje polovine sfere $x^2+y^2+z^2=R^2$.

370. $I_1=\iint\limits_S z\,dx\,dy$, $I_2=\iint\limits_S z^2\,dx\,dy$, gdje je S spoljašna strana elipsoida $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$.

371. $I=\iint\limits_S x^2\,dy\,dz+y^2\,dz\,dx+z^2\,dx\,dy$, gdje je S spoljašna strana sfere $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$.

372. $I=\iint\limits_S x^3\,dy\,dz$, gdje je S gornja strana gornje polovine elipsoida $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$.



Sl. 91

Rješenja:

369. Projekcija polusfere S na ravan xOy je krug D: $x^2+y^2\leqslant R^2$ (sl. 91). Jednačina donje polusfere je $z=-\sqrt{R^2-x^2-y^2}$, pa će biti

$$I=-\iint\limits_D x^2 y^2 \sqrt{R^2-x^2-y^2}\,dxdy.$$

Uvedimo polarne koordinate

$$x=\rho\cos\varphi,\quad y=\rho\sin\varphi,\quad J=\rho.$$

$$I=-\iint\limits_D \rho^4\cos^2\varphi\sin^2\varphi\sqrt{R^2-\rho^2}\cdot\rho\,d\rho\,d\varphi=$$

$$=-\int_0^{2\pi}\sin^2\varphi\cos^2\varphi\,d\varphi\int_0^R\rho^4\sqrt{R^2-\rho^2}\cdot\rho\,d\varphi.$$

Kako je

$$\int_0^{2\pi} \sin^2\varphi\cos^2\varphi\, d\varphi = \frac{1}{8}\int_0^{2\pi} \sin^2 2\varphi\, d(2\varphi) = \frac{1}{8}\left[\frac{2\varphi}{2} - \frac{\sin 4\varphi}{4}\right]_0^{2\pi} = \frac{\pi}{4},$$

$$\int_0^R \rho^4\sqrt{R^2-\rho^2}\cdot\rho\, d\rho = (R^2-\rho^2 = t^2, \quad -\rho\, d\rho = t\, dt) =$$

$$= \int_0^R (R^4 - 2R^2t^2 + t^4)\cdot t^2\, dt = \frac{R^7}{3} - \frac{2R^7}{5} + \frac{R^7}{7} = \frac{8R^7}{105},$$

biće

$$I = -\frac{\pi}{4}\cdot\frac{8R^7}{105} = -\frac{2R^7}{105}\pi.$$

370. Površ $S: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ sastoji se iz dvije površi

$$S_1: z_1 = c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}} \text{ i } S_2: \ z_2 = -c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}.$$

Projekcija površi S_1 i S_2 na xOy ravan biće D: $\frac{y^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1$.

a) $I_1 = \iint\limits_S z dxdy = \iint\limits_{S_1} z dxdy + \iint\limits_{S_2} z dxdy =$

$$= \iint\limits_D c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\, dxdy - \iint\limits_D -c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\, dxdy.$$

(Ispred drugog integrala imamo znak $-$, jer normala na površ S_2 gradi tupi ugao sa z-osom).

$$I_1 = 2c\iint\limits_D \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\, dxdy = 2c\cdot ab\iint\limits_{D'}\sqrt{1-\rho^2}\cdot\rho\, d\rho\, d\varphi =$$

$$= 2abc\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^1 \sqrt{1-\rho^2}\cdot\rho\, d\rho = \frac{4}{3}abc\pi.$$

b) $I_2 = \iint\limits_S z^2 dxdy = \iint\limits_{S_1} z^2 dxdy + \iint\limits_{S_2} z^2 dxdy =$

$$= \iint\limits_D c^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right) dxdy - \iint\limits_D c^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right) dxdy = 0.$$

371. Sfera S: $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$
sastoji se od gornjeg dijela S_1: $z_1=c+\sqrt{R^2-(x-a)^2-(y-b)^2}$ i donjeg $S_2: z_2=c-\sqrt{R^2-(x-a)^2-(y-b)^2}$ koji se projiciraju na krug $D:(x-a)^2+$ $+(y-b)^2\leqslant R^2$.

$$I_3=\iint\limits_S z^2\,dxdy=\iint\limits_{S_1} z_1^2\,dxdy+\iint\limits_{S_2} z_2^2\,dxdy=$$

$$=\iint\limits_D \{c^2+2c\sqrt{R^2-(x-a)^2-(y-b)^2}+[R^2-(x-a)^2-(y-b)^2]\}\,dxdy-$$

$$-\iint\limits_D \{c^2-2c\sqrt{R^2-(x-a)^2-(y-b)^2}+[R^2-(x-a)^2-(y-b)^2]\}\,dxdy,$$

dakle,

$$I_3=4c\iint\limits_D \sqrt{R^2-(x-a)^2-(y-b)^2}\,dxdy=8\pi c\frac{R^3}{3}.$$

Analogno $I_1=\iint\limits_S x^2\,dydz=8\pi a\dfrac{R^3}{3}$, $\quad I_2=\iint\limits_S y^2\,dzdx=8\pi b\dfrac{R^3}{3}$.

Prema tome,

$$I=I_1+I_2+I_3=\frac{8R^3\pi}{3}(a+b+c).$$

372. $I=\dfrac{2}{5}\pi a^3 bc.$

Izračunati fluks vektorskog polja:

373. $\vec{A}=xy\vec{i}+yz\vec{j}+xz\vec{k}$, kroz dio sfere $x^2+y^2+z^2=1$ (orijentisane vektorom vanjske normale) koji pripada I oktantu.

374. $\vec{A}=\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ kroz zatvorenu površ koju čine površi $z=1-\sqrt{x^2+y^2}$ i $z=0$.

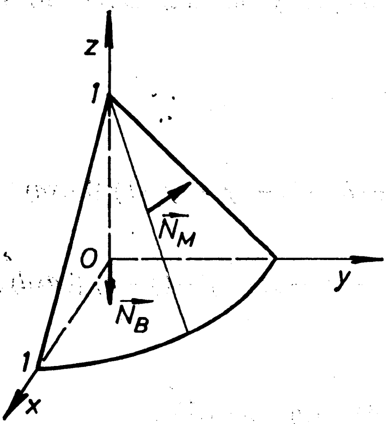
375. $\vec{A}=u\sin v\,\vec{i}-u\cos v\,\vec{j}+u\vec{k}$ kroz površ: $\vec{r}=u\cos v\,\vec{i}+u\sin v\,\vec{j}+v\vec{k}$ $(0\leqslant u\leqslant R,\quad 0\leqslant v\leqslant 2\pi)$.

376. $\vec{A}=\vec{r}$ kroz a) bočnu površ M konusa $z^2=x^2+y^2$ $(0\leqslant z\leqslant h)$;
b) osnovu B: $z=h$ konusa $z^2=x^2+y^2$.

377. $\vec{A}=(xy,\ yz,\ xz)$ kroz dio ravni $x+y+z=1$ u prvom oktantu.

Rješenja:

373. $\Phi=\iint_S \vec{A}\cdot\vec{N}\,dS=\iint_S xydydz+yzdzdx+zxdxdy=\dfrac{3\pi}{16}$.



Sl. 92

374. Ukupan fluks Φ biće jednak zbiru fluksa Φ_B kroz bazu $z=0$ i fluksa Φ_M kroz konus $z=1-\sqrt{x^2+y^2}$: $\Phi=\Phi_B+\Phi_M$ (sl. 92).

Na B je $z=0$, pa je

$$\Phi_B=\iint_B \vec{r}\cdot(-\vec{k})\,dS=-\iint_B z dS=0.$$

Normalu konusa nalazimo preko gradienta $\vec{N}_M=\dfrac{x\vec{i}+y\vec{j}+(1-z)\vec{k}}{\sqrt{x^2+y^2+(1+z)^2}}$.

$$\Phi_M=\iint_M \vec{r}\cdot\vec{N}_M dS=\iint_M (x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k})\cdot\frac{x\vec{i}+y\vec{j}+(1-z)\vec{k}}{\sqrt{x^2+y^2+(1-z)^2}}dS,$$

$$\Phi_M=\iint_M \frac{x^2+y^2+z(1-z)}{\sqrt{x^2+y^2+(1-z)^2}}dS=\iint_M \frac{x^2+y^2+z(1-z)}{\sqrt{x^2+y^2+(1-z)^2}}\;\frac{dxdy}{\dfrac{1-z}{\sqrt{x^2+y^2+(1-z)^2}}},$$

$$\Phi_M=\iint_M\left(\frac{x^2+y^2}{1-z}+z\right)dxdy=\iint_D\left(\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}+1-\sqrt{x^2+y^2}\right)dxdy,$$

$$\Phi_M=\iint_D 1\cdot dxdy=\pi,\quad \text{jer } D:\ x^2+y^2\leqslant 1.$$

Ukupan fluks biće $\Phi=\Phi_B+\Phi_M=0+\pi=\pi$.

Fluks Φ_M možemo računati i ovako:

$$\Phi_M=\iint_M \vec{r}\cdot\vec{N}\,dS=\iint_M xdydz+ydzdx+zdxdy=I_1+I_2+I_3$$

$$I_1=\iint_M xdydz=\iint_{M_1} xdydz+\iint_{M_2} xdydz$$

$$M_1: x=\sqrt{(1-z)^2-y^2},\qquad M_2: x=-\sqrt{(1-z)^2-y^2}$$

$$I_1=\iint_{D_1}\sqrt{(1-z)^2-y^2}\,dydx-\iint_{D_1}-\sqrt{(1-z)^2-y^2}\,dydz=$$

$$=2\iint_{D_1}\sqrt{(1-z)^2-y^2}\,dydz.$$

D_1 je trougao ograničen pravama $z=0,\ y+z=1,\ -y+z=1$, pa je

$$I_1=2\int_0^1 dz\int_{z-1}^{1-z}\sqrt{(1-z)^2-y^2}\,dy=2\int_0^1\left[\frac{1}{2}y\sqrt{(1-z)^2-y^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{(1-z)^2}{2}\arcsin\frac{y}{1-z}\right]_{z-1}^{1-z}dz=2\int_0^1\frac{(1-z)^2}{2}\cdot\pi\,dz=\frac{\pi}{3}.$$

Slično je $I_2=I_3=\dfrac{\pi}{3}$, pa opet imamo

$$\Phi_M=I_1+I_2+I_3=\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}=\pi.$$

375. Ako je površ S zadata u vektorskom obliku, tada je fluks

$$\Phi=\iint_S\vec{A}\cdot d\vec{S}=\iint_D\vec{A}\cdot\left(\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}\right)dudv=\iint_D\left[\vec{A},\ \frac{\partial\vec{r}}{\partial u},\ \frac{\partial\vec{r}}{\partial v}\right]dudv,$$

gdje je D oblast u ravni $u,\ v$.

U konkretnom slučaju imamo D: $0\leqslant u\leqslant R,\ 0\leqslant v\leqslant 2\pi$,

$$\left[\vec{A},\ \frac{\partial\vec{r}}{\partial u},\ \frac{\partial\vec{r}}{\partial v}\right]=\begin{vmatrix}u\sin v & -u\cos v & u\\ \cos v & \sin v & 0\\ -u\sin v & u\cos v & 1\end{vmatrix}=u+u^2,$$

$$\Phi=\iint_S\vec{A}\cdot d\vec{S}=\iint_D(u+u^2)\,dudv=\int_0^{2\pi}dv\int_0^R(u+u^2)\,du=2\pi\left(\frac{R^2}{2}+\frac{R^3}{3}\right).$$

376. a) $\Phi_M=0$, b) $\Phi_B=h^3\pi$.

377. $\Phi=\dfrac{1}{8}$.

378. Izračunati $\oiint_S xdydz+ydxdz+zdxdy$, gdje je S spoljašna strana tijela ograničenog površima: $z=0$, $x^2+y^2=R^2$ i $x^2+y^2+(z-R)^2=R^2$ $(0\leqslant z\leqslant R)$.

379. Izračunati $\oiint_S y^2zdxdy+xzdydz+x^2ydxdz$, gdje je S spoljašna strana površi sastavljene od paraboloida $z=x^2+y^2$, cilindra $x^2+y^2=1$ i ravni $z=0$.

380. Izračunati $\iint\limits_S f(x)\,dydz + g(y)\,dzdx + h(z)\,dxdy$, gdje su $f(x)$, $g(y)$, $h(z)$ neprekidne funkcije, a S spoljašna strana paralelepipeda:

$$0 \leqslant x \leqslant a, \quad 0 \leqslant y \leqslant b, \quad 0 \leqslant z \leqslant c.$$

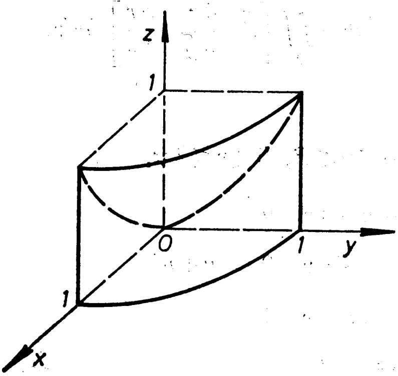
381. Izračunati

$\iint\limits_S \frac{dydz}{x} + \frac{dxdz}{y} + \frac{dxdz}{z}$, gdje je S spoljašna strana elipsoida

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$

Rješenja:

378. $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 = 0 + 2R^3\pi - R^3\pi = R^3\pi.$



Sl. 93

379. S se sastoji iz

$S_1: z = 0$; $S_2: x^2 + y^2 = 1$; $S_3: z = x^2 + y^2$ (sl. 93).

Napišimo dati integral u obliku

$$\Phi = \oiint\limits_S (xz\vec{i} + x^2 y\vec{j} + y^2 z\vec{k}) \cdot \vec{N}\,dS =$$

$$= \oiint\limits_S \vec{A} \cdot \vec{N}\,dS.$$

Tada je $\Phi = \iint\limits_{S_1} \vec{A} \cdot \vec{N}\,dS + \iint\limits_{S_2} \vec{A} \cdot \vec{N}\,dS + \iint\limits_{S_3} \vec{A} \cdot \vec{N}\,dS = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3.$

Na S_1: $z = 0$, $\vec{N} = -\vec{k}$, pa je $\Phi_1 = \iint\limits_{S_1} -y^2 z\,dS = 0.$

Na $S_2: x^2 + y^2 = 1$, $\vec{N} = x\vec{i} + y\vec{j}$, dakle

$$\Phi_2 = \iint\limits_{S_2} (x^2 z + x^2 y^2)\,dS = \iint\limits_S x^2 (z + y^2) \frac{dydz}{|x|} =$$

$$= \iint\limits_{S_2} |x| (z + y^2)\,dydz = 2 \iint\limits_D \sqrt{1 - y^2}\,(z + y^2)\,dydz, \quad \text{gdje je}$$

$D: \quad -1 \leqslant y \leqslant 1, \qquad 0 \leqslant z \leqslant 1.$

Znači.

$$\Phi_2 = 2 \int_{-1}^{1} \sqrt{1-y^2}\, dy \int_{0}^{1} (z+y^2)\, dz = \int_{-1}^{1} \left(\sqrt{1-y^2} + 2\, y^2 \sqrt{1-y^2}\right) dy,$$

odakle se smjenom $y = \sin t$ dobija $\Phi_2 = \dfrac{3\,\pi}{4}$.

Na S_3: $z = x^2 + y^2$, $\vec{N} = \dfrac{-2\,x\,\vec{i} - 2\,y\,\vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{4\,x^2 + 4\,y^2 + 1}}$, tj.

$$\Phi_3 = \iint_{S_3} (-2\,x^2 z - 2\,x^2 y^2 + y^2 z)\, dxdy =$$

$$= \iint_{x^2+y^2 \le 1} [-2\,x^2 (x^2+y^2) - 2\,x^2 y^2 + y^2 (x^2+y^2)]\, dxdy = -\frac{\pi}{4}.$$

Na kraju $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 = 0 + \dfrac{3\,\pi}{4} - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2}$.

380. $I = \left[\dfrac{f(a)-f(0)}{a} + \dfrac{g(b)-g(0)}{b} + \dfrac{h(c)-h(0)}{c}\right] abc.$

381. $I = 4\,\pi\, abc \left(\dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2}\right).$

Izračunati fluks vektora $\vec{A}$ kroz zatvorenu površ S orijentisanu vektorom vanjske normale, direktno i primjenom teoreme Gausa-Ostrogradskog ako je:

382. $\vec{A}(2\,x^2 y,\ 3\,y^2 x,\ z^2 xy)$, a S površ tijela omeđenog koordinatnim ravnima i dijelom sfere $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ u I oktantu.

383. $\vec{A} = r^2 \vec{r}$, a S zatvorena površ sastavljena iz dijela paraboloida $2\,z = x^2 + y^2$ i dijela ravni $z = b$ $(b > 0)$.

384. $\vec{A} = \vec{r}$, a S torus:

$$x = (a + b\cos\theta)\cos\varphi$$

$$y = (a + b\cos\theta)\sin\varphi$$

$$z = b\sin\theta \qquad (a > b > 0).$$

385. $\vec{A}(x^3,\ y^3,\ z^3)$ a S sfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

Rješenja:

382. $\vec{A}=(2x^2y,\quad 3y^2x,\quad z^2xy),\quad x^2+y^2+z^2=1$

a) Kako je

$$\Phi=\oiint_S \vec{A}\cdot\vec{N}\,dS=\iiint_V \operatorname{div}\vec{A}\,dxdydz,$$

a

$$\operatorname{div}\vec{A}=4xy+6yx+2zxy=10xy+2xyz,$$

biće:

$$\Phi=\iiint_V (10xy+2xyz)\,dxdydz.$$

Uvedimo sferne koordinate. Dobijemo

$$\Phi=\iiint_{V'}(10\rho^2\sin^2\theta\sin\varphi\cos\varphi+2\rho^3\sin^2\theta\sin\varphi\cos\varphi\cos\theta)\rho^2\sin\theta\,d\rho\,d\theta\,d\varphi=$$

$$=10\frac{\rho^5}{5}\Big|_0^1\left(-\cos\theta+\frac{\cos^3\theta}{3}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2\varphi}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+2\frac{\rho^6}{6}\Big|_0^1\frac{\sin^4\theta}{4}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2\varphi}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{0}},$$

tj.

$$\Phi=\frac{17}{24}.$$

b) Ukupni fluks biće jednak zbiru fluksova kroz dijelove koordinatnih ravni i sfere:

$$\Phi=\Phi_1+\Phi_2+\Phi_3+\Phi_4.$$

$$S_1: z=0,\quad \vec{N}=-\vec{k}\Rightarrow\Phi_1=\iint_{S_1}\vec{A}\cdot(-\vec{k})\,dS=\iint_{S_1}-z^2xy\,dS=0;$$

$$S_2: y=0,\quad \vec{N}=-\vec{j}\Rightarrow\Phi_2=\iint_{S_2}\vec{A}\cdot(-\vec{j})\,dS=\iint_{S_2}3y^2x\,dS=0;$$

$$S_3: x=0,\quad \vec{N}=-\vec{i}\Rightarrow\Phi_3=\iint_{S_3}\vec{A}\cdot(-\vec{i})\,dS=\iint_{S_3}2x^2y\,dS=0;$$

$$S_4: x^2+y^2+z^2=1,\quad \vec{N}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$$

$$\Phi_4=\iint_{S_4}(2x^2y\vec{i}+3y^2x\vec{j}+z^2xy\vec{k}).\ (x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k})\,dS=$$

$$=\iint_{S_4}(2x^3y+3y^3x+z^3xy)\,\frac{dxdy}{z}=$$

$$=\iint_{D_3}\left[\frac{2x^3y+3y^3x}{1-(x^2+y^2)}+(1-x^2-y^2)xy\right]dxdy,$$

gdje je

$$D_3 : x^2 + y^2 \leqslant 1, \quad x \geqslant 0, \quad y \geqslant 0.$$

Uvedimo polarne koordinate. Imaćemo

$$\Phi_4 = \iint_{D_3} \left[\frac{\rho^4 (2\cos^3\varphi \sin\varphi + 3\sin^3\varphi \cos\varphi)}{\sqrt{1-\rho^2}} + (1-\rho^2)\cdot \rho^2 \sin\varphi \cos\varphi \right] \rho \, d\rho \, d\varphi.$$

Kako je

$$\int_0^1 \frac{\rho^4 \rho \, d\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} = \frac{8}{15}, \quad \int_0^1 (1-\rho^2)\rho^2 \cdot \rho \, d\rho = \frac{1}{12}, \text{ dobija se}$$

$$\Phi_4 = \left[\frac{8}{15}\left(-2\frac{\cos^4\varphi}{4} + 3\frac{\sin^4\varphi}{4} \right) + \frac{1}{2}\,\frac{\sin^2\varphi}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}},$$

tj.

$$\Phi_4 = \frac{8}{15}\cdot\frac{5}{4} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{12} = \frac{17}{24}.$$

Na kraju, ukupni fluks biće

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 + \Phi_4 = \frac{17}{24}.$$

Fluks Φ_4 mogao se računati i ovako:

$$\Phi_4 = \iint_{S_4} 2x^2 y dydz + 3y^2 x dxdz + z^2 xy dxdy.$$

$$I_1 = \iint_{S_4} 2x^2 y dydz = \iint_{D_1} 2(1-y^2-z^2) y dydz = (y = \rho\sin\varphi,\ z = \rho\cos\varphi) =$$

$$= \iint_{D_1} 2(1-\rho^2)\rho \sin\varphi \ \rho \ d\rho \, d\varphi = \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{5} \right) = \frac{4}{15}:$$

gdje je $D_1 : y^2 + z^2 \leqslant 1,\ y \geqslant 0,\ z \geqslant 0.$

$$I_2 = \iint_{S_4} 3y^2 x dxdz = \iint_{D_2} 3(1-x^2-z^2) x dxdz = (x = \rho\cos\varphi,\ z = \rho\sin\varphi) =$$

$$= 3\iint_{D_2} (1-\rho^2)\rho\cos\varphi \ \rho \, d\rho \, d\varphi = 3\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right)\cdot \sin\varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{6}{15},$$

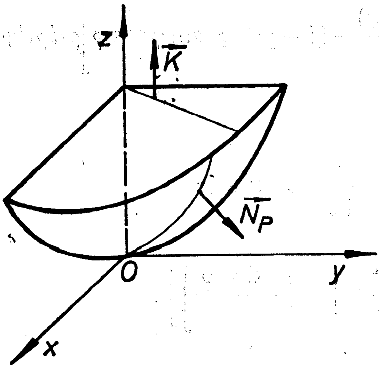
gdje je $D_2 : x^2 + z^2 \leqslant 1,\ x \geqslant 0,\ z \geqslant 0.$

$$I_3 = \iint_{S_4} z^2 xy dxdy = \iint_{D_3} (1-x^2-y^2) xy dxdy = (x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi) =$$

$$= \iint_{D_3} (1-\rho^2)\rho^2 \sin\varphi\cos\varphi \ \rho \, d\rho \, d\varphi = \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6} \right)\frac{\sin^2\varphi}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{24}.$$

Tako imamo

$$\Phi_4 = I_1 + I_2 + I_3 = \frac{4}{15} + \frac{6}{15} + \frac{1}{24} = \frac{2}{3} + \frac{1}{24} = \frac{17}{24}.$$



Sl. 94

383. a) $\Phi = \Phi_R + \Phi_P$, gdje je Φ_R fluks kroz ravan, a Φ_P fluks kroz paraboloid (sl. 94).

Za ravan R je $z = b$, $\vec{N}_R = \vec{k}$, a

$$\Phi_R = \iint_R r^2 \vec{r} \cdot \vec{N}\, dS =$$

$$= \iint_R (x^2 + y^2 + z^2)\, z dS =$$

$$= \iint_{D: x^2+y^2 \leqslant 2b} (x^2 + y^2 + b^2)\, b dx dy =$$

$$= \iint_D (\rho^2 + b^2)\, b \rho\, d\rho\, d\varphi =$$

$$= 2\pi b \left(\frac{\rho^4}{4} + b^2 \frac{\rho^2}{2}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{2b}} = 2\pi (b^3 + b^4).$$

Za paraboloid P: $2z = x^2 + y^2$ imamo $\vec{N}_P = \dfrac{x\vec{i} + y\vec{j} - \vec{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}}$, tj.

$$\Phi_P = \iint_R (x^2 + y^2 + z^2)(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) \cdot \frac{x\vec{i} + y\vec{j} - \vec{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}}\, dS =$$

$$= \iint_{D: x^2+y^2 \leqslant 2b} \left[x^2 + y^2 + \left(\frac{x^2 + y^2}{2}\right)^2\right]\left[x^2 + y^2 - \frac{x^2 + y^2}{2}\right] dx dy =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{2b}} \left(\rho^2 + \frac{\rho^4}{4}\right)\frac{\rho^2}{2} \cdot \rho\, d\rho = 2\pi \left(\frac{\rho^6}{12} + \frac{\rho^8}{64}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{2b}} = 2\pi\left(\frac{2b^3}{3} + \frac{b^4}{4}\right).$$

Ukupni fluks biće

$$\Phi = \Phi_R + \Phi_P = 2\pi (b^3 + b^4) + 2\pi\left(\frac{2b^3}{3} + \frac{b^4}{4}\right) = 10\pi\left(\frac{b^3}{3} + \frac{b^4}{4}\right).$$

b) Primjenom teoreme Gausa-Ostrogradskog dobijamo

$$\Phi = \oiint_S \vec{A} \cdot \vec{N}\, dS = \iiint_V \operatorname{div} \vec{A}\, dx dy dz.$$

Kako je $\operatorname{div} r^2 \vec{r} = \nabla \cdot r^2 \vec{r} = \nabla r^2 \cdot \vec{r} + (\nabla \cdot \vec{r})\, r^2 =$

$$= 2r \operatorname{grad} r \cdot \vec{r} + \operatorname{div} \vec{r} \cdot r^2 = 2r \frac{\vec{r}}{r} \cdot \vec{r} + 3r^2 = 5r^2,$$

to će biti

$$\Phi = \iiint_V 5r^2\, dx dy dz = 5 \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2)\, dx dy dz.$$

Upotrijebimo cilindrične koordinate, pa će biti

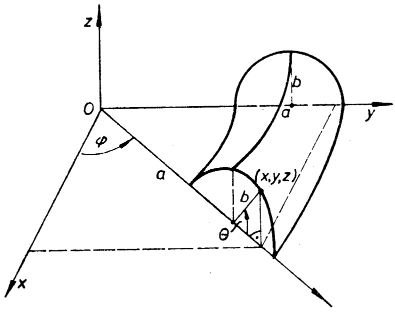
$$\Phi = 5 \iiint_{V'} (\rho^2 + z^2)\, \rho\, d\rho\, d\varphi\, dz = 5 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{2b}} d\rho \int_{\frac{\rho^2}{2}}^{b} \rho\, (\rho^2 + z^2)\, dz =$$

$$= 10\pi \int_0^{\sqrt{2b}} \left(b\rho^3 + \rho \frac{b^3}{3} - \frac{\rho^5}{2} - \frac{\rho^7}{24} \right) d\rho =$$

$$= 10\pi \left(b \frac{\rho^4}{4} + b^3 \frac{\rho^2}{6} - \frac{\rho^6}{12} - \frac{\rho^8}{24 \cdot 8} \right) \Bigg|_0^{\sqrt{2b}} =$$

$$= 10\pi \left(b^3 + \frac{b^4}{3} - \frac{8b^3}{12} - \frac{16b^4}{24 \cdot 8} \right) = 10\pi \left(\frac{b^3}{3} + \frac{b^4}{4} \right).$$

384. Parametrima φ i θ u jednačinama torusa može se dati geometrijski smisao kao na slici 95, sa koje se vidi da je $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$.



Sl. 95

Direktno, po definiciji fluksa:

$$\Phi = \iint_S \vec{A} \cdot \vec{N}\, dS =$$

$$= \iint_D \vec{A} \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \right) d\varphi\, d\theta,$$

gdje je $D: 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi,\ \ 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$.

Na torusu je $\vec{A} = (a + b\cos\theta) \cdot (\cos\varphi\, \vec{i} + \sin\varphi\, \vec{j}) + b \sin\theta\, \vec{k}$,

$$\vec{A} \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} \times \frac{\partial r}{\partial \theta} \right) = \begin{vmatrix} (a + b\cos\theta)\cos\varphi & (a + b\cos\theta)\sin\varphi & b\sin\theta \\ -(a + b\cos\theta)\sin\varphi & (a + b\cos\theta)\cos\varphi & 0 \\ -b\sin\theta\cos\varphi & -b\sin\theta\sin\varphi & b\cos\theta \end{vmatrix} =$$

$$= b^2 \sin^2\theta\, (a + b\cos\theta)\, (\sin^2\varphi + \cos^2\varphi) + b\cos\theta\, (a + b\cos\theta)^2\, (\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) =$$

$$= (ab^2 \sin^2\theta + b^3 \sin^2\theta \cos\theta + a^2 b \cos\theta + 2ab^2 \cos^2\theta + b^3 \cos^3\theta).$$

Zato je fluks

$$\Phi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} [ab^2 \sin^2\theta + 2\,ab^2 \cos^2\theta + (b^3 + a^2 b)\cos\theta]\, d\theta =$$

$$= 2\pi \left[ab^2 \left(\frac{\theta}{2} - \frac{\sin 2\theta}{4}\right) + 2\,ab^2 \left(\frac{\theta}{2} + \frac{\sin 2\theta}{4}\right) + (b^3 + a^2 b)\sin\theta \right]\Bigg|_0^{2\pi} =$$

$$= 2\pi \cdot 3\,ab^2 \cdot \pi = 6\,a\,b^2\,\pi^2.$$

Primjenom teoreme Gausa-Ostrogradskog dobija se

$$\Phi = \oiint_S \vec{A} \cdot \vec{N}\, dS = \iiint_V \operatorname{div} \vec{A}\, dxdydz.$$

Kako je $\operatorname{div} \vec{r} = 3$, to je $\Phi = 3 \iiint_V dxdydz.$

Uvedimo koordinate:

$$x = (a + \rho\cos\theta)\cos\varphi$$

$$y = (a + \rho\cos\theta)\sin\varphi$$

$$z = \rho\sin\theta.$$

Sa slike se vidi da se granice kreću ovako:

$$0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi, \quad 0 \leqslant \rho \leqslant b.$$

Jakobijan $J = \begin{vmatrix} \cos\theta\cos\varphi & \cos\theta\sin\varphi & \sin\theta \\ -(a+\rho\cos\theta)\sin\varphi & (a+\rho\cos\theta)\cos\varphi & 0 \\ -\rho\sin\theta\cos\varphi & -\rho\sin\theta\sin\varphi & \rho\cos\theta \end{vmatrix} = \rho(a + \rho\cos\theta).$

Zato imamo

$$\Phi = 3 \iiint_V dxdydz = 3 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{b} \rho(a + \rho\cos\theta)\, d\rho =$$

$$= 3 \cdot 2\pi \int_0^{2\pi} \left(a\frac{b^2}{2} + \frac{b^3}{3}\cos\theta\right) d\theta = 6\pi a \frac{b^2}{2} \cdot 2\pi + 0, \text{ tj. } \Phi = 6\,ab^2\,\pi^2.$$

Zapremina torusa može se dobiti i preko jednostrukog integrala kad se ima u vidu da torus nastaje rotacijom kruga $(x - a)^2 + z^2 \leqslant b^2$ oko z-ose).

385. $\Phi=\frac{12}{5}a^5\pi$.

Primjenom teoreme Gausa-Ostrogradskog izračunati:

386. $\oiint\limits_S 2\,dxdy+y\,dxdz-x^2z\,dydz$, ako je S površ koja ograničava tijelo V: $4x^2+y^2+4z^2\leqslant 1$, $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$, $z\geqslant 0$, orijentisana vektorom vanjske normale.

387. $\oiint\limits_S (x-y+z)^2\,dydz+(y-z+x)^2\,dzdx+(z-x+y)^2\,dxdy$

ako je S površ koja ograničava tijelo:

$$V:\ \frac{(x-y+z)^2}{9}+\frac{(y-z+x)^2}{4}+\frac{(z-x+y)^2}{1}\leqslant 1,\ x-y+z\geqslant 0.$$

388. Fluks vektora $\vec{A}(xy,\ x^2y,\ y^2z)$ kroz vanjsku stranu zatvorene površi koju čine površi date jednačinama $z=0$, $z=x^2+y^2$, $x^2+y^2=1$.

389. Fluks vektora $\vec{A}=(x-3y+z)\vec{i}+(y-2x+z)\vec{j}+(z-x-y)\vec{k}$ kroz vanjsku stranu površi

$$|x-3y+z|+|2x+y-z|+|x+y+z|=1.$$

390. Fluks vektora

i) $\vec{a}=\vec{c}+z^2\vec{k}$; ii) $\vec{b}=\vec{c}+z^5\vec{k}$; $(\vec{c}=\text{const})$ kroz površ

$$S:\ (x^2+y^2+z^2)^5=a^7xyz.$$

391. Fluks vektora i) $\vec{a}=2x\vec{i}-y\vec{j}-z\vec{k}$; ii) $\vec{b}=x\vec{i}-y\vec{j}+z^2\vec{k}$ kroz spoljnu stranu gornjeg dijela površi

$$S:\ \left(\frac{x}{a}\right)^{2/3}+\left(\frac{y}{b}\right)^{2/3}+\left(\frac{z}{c}\right)^{2/3}=1,\qquad (z\geqslant 0).$$

Rješenja:

386. Iz $I=\oiint\limits_S 2\,dxdy+y\,dxdz-x^2z\,dydz$ vidi se da je

$\vec{A}=-x^2z\vec{i}+y\vec{j}+2\vec{k}$. Kako je $\operatorname{div}\vec{A}=-2xz+1$, to je

$$I=\oiint\limits_S\vec{A}\cdot d\vec{S}=\iiint\limits_V\operatorname{div}\vec{A}\cdot dxdydz=\iiint\limits_V(-2xz+1)\,dxdydz,$$

gdje je V: $4x^2+y^2+4z^2\leqslant 1$, $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$, $z\geqslant 0$.

Upotrijebimo uopštene sferne koordinate: $x=\frac{1}{2}\rho\cos\varphi\sin\theta$, $y=$ $=\rho\sin\varphi\sin\theta$, $z=\frac{1}{2}\rho\cos\theta$. Biće $J=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{1}{2}\rho^2\sin\theta$, a V': $\rho\leqslant 1$, $0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}$, $0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$. Dakle,

$$I=\iiint\limits_{V'}\left(-\frac{1}{2}\rho^2\cos\varphi\sin\theta\cos\theta+1\right)\rho^2\sin\theta\ d\rho\, d\varphi\, d\theta=$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\left[-\frac{\rho^5}{5}\cos\varphi\sin\theta\cos\theta+\frac{\rho^3}{3}\right]_0^1=$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[-\frac{1}{5}\cos\varphi\sin\theta\cos\theta+\frac{1}{3}\right]d\theta=$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\left[-\frac{1}{5}\cos\varphi\frac{\sin^2\theta}{2}+\frac{1}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[-\frac{1}{10}\cos\varphi+\frac{1}{3}\cdot\frac{\pi}{2}\right]d\varphi=\frac{\pi^2}{12}-\frac{1}{10}.$$

387. Primijenimo teoremu Gausa-Ostrogradskog.

Zbog $\operatorname{div}\vec{A}=2(x-y+z)+2(y-z+x)+2(z-x+y)=2(x+y+z)$, imamo

$I=2\iiint\limits_V(x+y+z)\,dxdydz$, gdje je

$$V:\ \frac{(x-y+z)^2}{9}+\frac{(y-z+x)^2}{4}+\frac{(z-x+y)^2}{1}\leqslant 1,\ x-y+z\geqslant 0.$$

Uvedimo nove promjenljive:

$$x-y+z=u,\quad y-z+x=v,\quad z-x+y=w.$$

U novom koordinatnom sistemu tijelo V će se preslikati na

$$V':\ \frac{u^2}{9}+\frac{v^2}{4}+\frac{w^2}{1}\leqslant 1,\quad u\geqslant 0.$$

Osim toga

$$x+y+z=u+v+w, \quad x=\frac{u+v}{2}, \quad y=\frac{v+w}{2}, \quad z=\frac{u+w}{2},$$

$$J=\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{vmatrix}=\frac{1}{4}, \quad \text{pa je}$$

$$I=2\iiint\limits_{V'} (u+v+w)\cdot\frac{1}{4}\,dudvdw.$$

Uvedimo smjenu

$$u=3\rho\cos\varphi\sin\theta,$$
$$v=2\rho\sin\varphi\sin\theta,$$
$$w=\rho\cos\theta.$$

Zbog

$$J=6\rho^2\sin\theta, \quad V'': \quad -\frac{\pi}{2}\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}, \quad 0\leqslant\theta\leqslant\pi, \quad 0\leqslant\rho\leqslant 1, \quad \text{biće}$$

$$I=3\iiint\limits_{V''} \rho\,(3\cos\varphi\sin\theta+2\sin\varphi\sin\theta+\cos\theta)\cdot\rho^2\sin\theta\,d\rho\,d\varphi\,d\theta=$$

$$=3\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\int\limits_0^{\pi} d\theta\int\limits_0^1 (3\cos\varphi\sin\theta+2\sin\varphi\sin\theta+\cos\theta)\sin\theta\,\rho^3\,d\rho=$$

$$=3\cdot\frac{1}{4}\int\limits_0^{\pi}[3\sin\varphi\sin^2\theta-2\cos\varphi\sin^2\theta+\varphi\sin\theta\cos\theta]\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\,d\theta=$$

$$=3\cdot\frac{1}{4}\int\limits_0^{\pi}[6\sin^2\theta-0+\pi\sin\theta\cos\theta]\,d\theta=$$

$$=3\cdot\frac{1}{4}\left[6\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\sin 2\theta}{4}\right)+\pi\,\frac{\sin^2\theta}{2}\right]_0^{\pi}=\frac{9\pi}{4}.$$

388. Kako je

$$\operatorname{div}\vec{A}=\left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right)\cdot(xy\,\vec{i}+x^2y\,\vec{j}+y^2z\,\vec{k})=y+x^2+y^2,$$

imaćemo

$$\Phi=\iiint\limits_V (y+x^2+y^2)\,dxdydz, \quad \text{gdje je } V\colon 0\leqslant z\leqslant x^2+y^2, \; x^2+y^2\leqslant 1 \; \text{(sl.96)}.$$

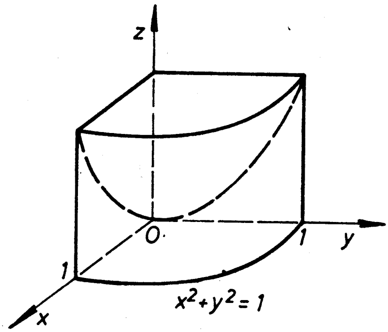
Uvođenjem cilindričnih koordinata dobijamo

$$\Phi=\iiint\limits_{V'}(\rho\sin\varphi+\rho^2)\,\rho\,d\rho\,d\varphi\,dz=$$

$$=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1(\rho^2\sin\varphi+\rho^3)\,d\rho\int_0^{\rho^2}dz=$$

$$=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1(\rho^4\sin\varphi+\rho^5)\,d\rho=$$

$$=\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{5}\sin\varphi+\frac{1}{6}\right)d\varphi=\frac{1}{6}\cdot 2\pi=\frac{\pi}{3}.$$



Sl. 96

389. $\Phi=\dfrac{1}{3}$.

390. i) Površ S je zatvorena a tijelo V koje ona ograničava leži u prvom, trećem, šestom i osmom oktantu.

Primjenom formule Ostrogradskog dobija se

$$I_a=\iint\limits_S\vec{a}\cdot d\vec{S}=2\iiint\limits_V z\,dV.$$

Kako se tijelo V sastoji iz četiri geometrijski jednaka dijela, od kojih su dva iznad a dva ispod ravni $z=0$, to je $I_a=0$.

ii) $$I_b=\iint\limits_S\vec{b}\,d\vec{S}=\iiint\limits_V\operatorname{div}\vec{b}\,dV=5\iiint\limits_V z^4\,dV,$$

i zatim

$$I_b=20\iiint\limits_{V_1}z^4\,dV,$$

gdje je $V_1=\{(x,y,z)\in V:\ x\geqslant 0,\quad y\geqslant 0,\quad z\geqslant 0\}$.

Uvedimo sferne koordinate. Jednačina površi S u novim koordinatama je

$$r=a\sqrt[7]{\cos\varphi\sin\varphi\sin^2\theta\cos\theta}.$$

Biće, dakle,

$$I_b=20\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{a\sqrt[7]{\cos\varphi\sin\varphi\sin^2\theta\cos\theta}}r^6\cos^4\theta\sin\theta\,dr=$$

$$= 20\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\theta \sin\theta\, d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a\sqrt[7]{\cos\varphi\ \sin\varphi\ \sin^2\theta\ \cos\theta}} r^6\, dr =$$

$$= \frac{20}{7} a^7 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5\theta \sin^3\theta\ d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi \sin\varphi\, d\varphi = \frac{10}{7} a^7 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5\theta \sin^3\theta\, d\theta.$$

Koristeći smjenu $\sin\theta = t$, $\cos^4\theta = (1-\sin^2\theta)^2$, dobija se

$$I_b = \frac{10\, a^7}{7} \int_0^1 (t^3 - 2\, t^5 + t^7)\, dt = \frac{10}{7} a^7 \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3} + \frac{1}{8}\right) = \frac{5}{84} a^7.$$

391. i) Zatvorićemo površ S dijelom D^- ravni Oxy koji ograničava linija $\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3} + \left(\frac{y}{b}\right)^{2/3} = 1$, a čiji je vektor normale $-\vec{k}$. Biće

$$\iint_S = \iint_S + \iint_{D^-} - \iint_{D^-} = \oiint_{SUD-} - \iint_{D-}.$$

Kako je $\operatorname{div} \vec{a} = 0$, to je $\iint_S = -\iint_{D^-} = \iint_D$,

i zatim

$$\iint_S \vec{a}\, d\vec{S} = -\iint_D z\vec{k} \cdot \vec{k} \cdot dxdy = -\iint_D zdxdy = 0.$$

ii) Kako je $\iint_D \vec{b}\, d\vec{S} = 0$, to je

$$I_b = \iint_S \vec{b}\, d\vec{S} = \iint_{SUD} \vec{b}\, d\vec{S} = \iiint_V \operatorname{div} \vec{b}\, dV = 2 \iiint_V z\, dV.$$

Uvedimo smjenu $x = a\, r \cos^3\varphi \sin^3\theta$, $y = b\, r \sin^3\varphi \sin^3\theta$, $z = c\, r \cos^3\theta$; tada je $J = 9\, abc\, r^2 \sin^5\theta \cos^2\theta \sin^2\varphi \cos^2\varphi$. (Može se uvesti i smjena $x = a r^3 \cos^3\varphi \sin^3\theta$, $y = b\, r^3 \sin^3\varphi \sin^3\theta$, $z = c\, r^3 \cos^3\theta$ za koju se vrijednost Jakobijana dosta lako računa ako se jedna za drugom uvedu dvije smjene $x = a\, x_1^3$, $y = b\, y_1^3$, $z = c\, z_1^3$, $J = 27\, abc\, x_1^2\ y_1^2\ z_1^2$,

i

$$x_1 = r\cos\varphi \sin\theta,\ y_1 = r\sin\varphi \sin\theta,\ z = r\cos\theta,\ J_2 = r^2 \sin\theta).$$

Biće

$$I_b = \iint_S \vec{b} d\vec{S} = 2 \iiint_V z dV = 2 \int_0^{2\pi} \sin^2\varphi \cos^2\varphi\, d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5\theta \cos^5\theta\, d\theta \int_0^1 9abc^2 r^3 dr =$$

$$=\frac{18\,abc^2}{4}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\sin 2\varphi}{2}\right)^2 d\varphi\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^5\theta\cos^5\theta\, d\theta=$$

$$=\frac{9\,abc^2}{8}\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos 4\varphi}{2}\, d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^5\theta\cos^5\theta\, d\theta=\frac{9\,\pi\, abc^2}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^5\theta\cos^5\theta\, d\theta.$$

Koristeći smjenu $\sin\theta=t$, dobija se

$$I_b=\frac{9\,\pi\, abc^2}{8}\cdot\int_0^1(t^5-2\,t^7+t^9)\,dt=\frac{9\,\pi\, abc^2}{8}\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{4}+\frac{1}{10}\right)=\frac{3\,\pi\, abc^2}{160}.$$

392. Zadata je baza $A(0,\ 0,\ 0)$ $B(5,\ 0,\ 0)$ $C(0,\ 4,\ 0)$ i vrh $S(2,\ 3,\ 9)$ piramide. Naći fluks vektora $\vec{F}(x-2\,x^2 z,\ \ 2\,xyz,\ \ xz^2+y)$ kroz omotač piramide $SABC$.

393. Odrediti funkciju $f(x)$ tako da vektorsko polje

$$\vec{A}=f(x)\,\vec{i}+\frac{2\,xy}{1+x^2}f(x)\,\vec{j}-\frac{3\,z}{1+x^2}\vec{k}$$

bude solenoidalno i da je $f(1)=2$. Zatim naći fluks tog polja kroz površ $S:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1\ (x\geqslant 0)$ orijentisanu spoljašnom normalom elipsoida.

394. Izračunati $\displaystyle\iint_S\frac{\cos\varphi}{r^2}\,dS$, gdje je S dio ravni $ax+by+cz=d$ $(a>0,\ b>0,\ c>0,\ d>0)$ u I oktantu, a φ ugao između radijus-vektora $\vec{r}$ i normale $\vec{N}$ površi S.

395. Neka je S jednostavno zatvorena po dijelovima glatka površ sa spoljašnom normalom $\vec{N}$, a $\vec{r}=(x-a)\,\vec{i}+(y-b)\,\vec{j}+(z-c)\,\vec{k}$. Izračunati

$$I=\iint_S\frac{\cos\sphericalangle(\vec{r},\ \vec{N})}{r^2}\,dS.$$

396. Naći fluks vektora $\vec{A}=\sum\limits_{i=1}^{n}\operatorname{grad}\left(-\dfrac{e_i}{4\,\pi\, r_i}\right)$, gdje je e_i konstanta, a r_i rastojanje tačke $M_i\,(a_i,\ b_i,\ c_i)$ od promjenljive tačke $M\,(x,\ y,\ z)$, kroz vanjsku stranu zatvorene površi S koja ne prolazi ni kroz jednu od tačaka M_i $(i=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$.

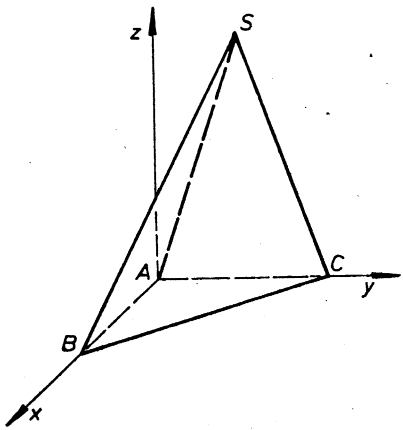
Rješenja.

392. Baza $\mathscr{B}$ piramide je trougao ABC, a omotač $\mathscr{M}$ se sastoji iz tri trougla: SAB, SAC i SBC (sl. 97).

Po teoremi Gausa-Ostrogradskog $\Phi_{\mathscr{B}} + \Phi_{\mathscr{M}} = \iiint\limits_V \operatorname{div} \vec{A}\, dxdydz$.

Kako je $\operatorname{div} \vec{A} = 1 - 4xz + 2xz + 2xz = 1$, to je

$$\Phi_{\mathscr{M}} = -\Phi_{\mathscr{B}} + \iiint\limits_V dxdydz.$$



Sl. 97

Vektor normale baze $\vec{N} = -\vec{k}$, pa je

$$\Phi_{\mathscr{M}} = \iint\limits_{\mathscr{B}} (xz^2 + y) dS + \iiint\limits_V dxdydz.$$

Imamo

$$\iiint\limits_V dxdydz = V_{\text{piramide}} = \frac{1}{6} \cdot 4 \cdot 5 \cdot 9 = 30,$$

$$\iint\limits_{\mathscr{B}} (xz^2 + y)\, dS = \iint\limits_{\mathscr{B}} y\, dxdy = \int\limits_0^5 \frac{y^2}{2} \Bigg|_0^{4\left(1-\frac{x}{5}\right)} dx =$$

$$= 8 \int\limits_0^5 \left(1 - \frac{x}{5}\right)^2 dx = 8\, \frac{\left(1 - \frac{x}{5}\right)^3}{3} (-5) \Bigg|_0^5 = \frac{40}{3}.$$

Na kraju $\Phi_{\mathscr{M}} = \dfrac{40}{3} + 30 = \dfrac{130}{3}$.

393. Da bi polje $\vec{A}$ bilo solenoidalno, mora biti divergencija tog polja jednaka nuli:

$$\operatorname{div} \vec{A} = f'(x) + \frac{2x}{1+x^2} f(x) - \frac{3}{1+x^2} = 0.$$

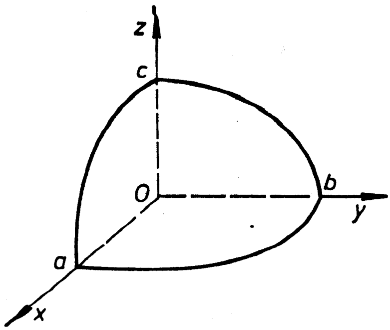
Odavde je

$$f(x) = e^{-\int \frac{2x}{1+x^2} dx} \left(C + \int e^{\int \frac{2x}{1+x^2} dx} \cdot \frac{3}{1+x^2} dx \right), \text{ tj.}$$

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} (C + 3x).$$

Pošto mora biti $f(1)=2$, to je $2=\frac{1}{1+1}(C+3)$, tj. $C=1$, pa imamo

$$\vec{A}=\frac{1+3x}{1+x^2}\vec{i}+\frac{2xy(1+3x)}{(1+x^2)^2}\vec{j}-\frac{3z}{(1+x^2)^2}\vec{k}.$$



Sl. 98

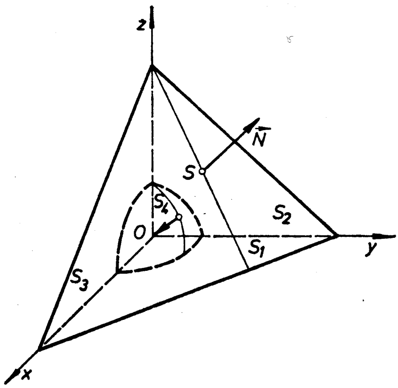
Kako je $\operatorname{div}\vec{A}=0$, to iz

$$\Phi_S-\Phi_B=\iiint\limits_V \operatorname{div}\vec{A}\,dxdydz,$$

gdje je B: $x=0$, $\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqslant 1$ (sl. 98),

slijedi

$$\Phi_S=\Phi_B=\iint\limits_B \vec{A}\cdot\vec{i}\,dydz=\iint\limits_B \frac{1+3x}{1+x^2}\,dydz=\iint\limits_B dydz=bc\,\pi.$$



Sl. 99

394. Integral $I=\iint\limits_S \frac{\cos\varphi}{r^2}\,dS$ možemo pisati u obliku

$$I=\iint\limits_S \frac{\vec{r}\cdot\vec{N}}{r\cdot 1}\cdot\frac{1}{r^2}\,dS=\iint\limits_S \frac{\vec{r}}{r^3}\cdot\vec{N}\,dS,$$

jer je $\cos\varphi=\frac{\vec{r}\cdot\vec{N}}{r\cdot 1}$.

Kako je $\operatorname{div}\frac{\vec{r}}{r^3}=(\nabla\cdot\vec{r})\cdot\frac{1}{r^3}+\vec{r}\cdot\nabla\frac{1}{r^3}=$

$$=3\frac{1}{r^3}+\vec{r}\cdot\frac{-3}{r^4}\frac{\vec{r}}{r}=0,$$

to ćemo zatvoriti tijelo V (sl. 99) datom ravni $ax+by+cz=d$, ravnima $z=0$, $x=0$, $y=0$ i sferom $x^2+y^2+z^2=\varepsilon^2$ $\left(\text{gdje je } 0<\varepsilon<\frac{d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right)$.

Fluks kroz zatvorenu površ koja ograničava tijelo V jednak je nuli, jer je $\operatorname{div}\frac{\vec{r}}{r^3}=0$, tj. $\Phi_1+\Phi_2+\Phi_3+\Phi_4+\Phi_S=0$.

Φ_1 je fluks kroz ravan $z=0$, pa će biti

$$\Phi_1=\iint\limits_{S_1}\frac{\vec{r}}{r^3}\cdot(-\vec{k}\,dS)=\iint\limits_{S_1}\frac{-z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\,dS=0.$$

Na isti način $\Phi_2 = \Phi_3 = 0$.

Fluks Φ_4 kroz dio S_4 sfere $x^2 + y^2 + z^2 =$ [illegible] sa normalom usmjerenom ka koordinatnom početku biće

$$\Phi_4 = \iint_{S_4} \frac{\vec{r}}{r^3} \cdot \vec{N}\, dS = \iint_{S_4} \frac{\vec{r}}{r^3} \left(\frac{-\vec{r}}{r} \right) dS = - \iint_{S_4} \frac{r^2}{r^4}\, dS =$$

$$= \frac{-1}{\varepsilon^2} \iint_{S_4} dS = \frac{-1}{\varepsilon^2} \cdot \frac{4\varepsilon^2 \pi}{8} = \frac{-\pi}{2},$$

jer integral $\iint_{S_4} dS$ predstavlja osminu površine sfere radijusa ε.

Na kraju imamo

$$\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 + \Phi_4 + \Phi_5 = 0,$$

$$0 + 0 + 0 - \frac{\pi}{2} + \Phi_S = 0, \quad \text{tj.} \quad \Phi_S = \frac{\pi}{2}.$$

(Dio sfere S_4 uveli smo zato da bismo iz oblasti V isključili tačku $O(0, 0, 0)$ u kojoj je $r = 0$).

395. Integral I pišemo u obliku $I = \oiint_S \frac{\vec{r} \cdot \vec{N}}{r^3}\, dS$.

Nađimo $\operatorname{div} \frac{\vec{r}}{r^3}$.

$$\operatorname{div} \frac{\vec{r}}{r^3} = \nabla \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} = \left(\nabla \frac{1}{r^3} \right) \cdot \vec{r} + (\nabla \cdot \vec{r}) \cdot \frac{1}{r^3} =$$

$$= -3 \frac{1}{r^4} \operatorname{grad} r \cdot \vec{r} + \operatorname{div} \vec{r} \cdot \frac{1}{r^3} = -\frac{3}{r^4} \cdot \frac{\vec{r}}{r} \cdot \vec{r} + 3 \frac{1}{r^3} = 0.$$

Kako podintegralna funkcija $\frac{\vec{r}}{r^3}$ nije definisana u tački $A(a, b, c)$, jer je tamo $r = 0$, to razlikujemo dva slučaja:

a) površ S ne obuhvata tačku $A(a, b, c)$

b) površ S obuhvata tačku $A(a, b, c)$.

a) Ako površ S ne obuhvata tačku A, tada se može primijeniti teorema Gausa-Ostrogradskog, pa je

$$I = \oiint_S \frac{\vec{r}}{r^3} \cdot \vec{N}\, dS = \iiint_V \operatorname{div} \frac{\vec{r}}{r^3}\, dxdydz = 0,$$

jer je u oblasti V koju ograničava površ S $\operatorname{div} \frac{\vec{r}}{r^3} = 0$.

b) Ako površ S obuhvata taču $A(a, b, c)$, tada vrijedi

$$\iint_S \frac{\vec{r}}{r^3}\cdot \vec{N}dS = \iint_{S_1} \frac{\vec{r}}{r^3}\cdot \vec{N}dS,$$

gdje je S_1 bilo kakva jednostavno zatvorena glatka površ koja takođe obuhvata tačku $A(a, b, c)$.

Za S_1 uzećemo, specijalno, sferu $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$ (jer nam je tako najlakše izračunati gornji integral).

Normala $\vec{N}_{S_1}$ će biti

$$\vec{N}_{S_1} = \frac{(x-a)\vec{i}+(y-b)\vec{j}+(z-c)\vec{k}}{R} = \frac{\vec{r}}{R},$$

pa imamo

$$\iint_S \frac{\vec{r}}{r^3}\cdot \vec{N}dS = \iint_{S_1} \frac{\vec{r}}{r^3}\cdot \vec{N}dS = \iint_{S_1} \frac{\vec{r}}{r^3}\cdot \frac{\vec{r}}{R}dS = \frac{1}{R^2}\iint_{S_1} dS = \frac{1}{R^2}4R^2\pi = 4\pi.$$

Znači

$$\oiint_S \frac{\cos\sphericalangle(\vec{r}, \vec{N})}{r^2}dS = \begin{cases} 0, & \text{ako } S \text{ ne obuhvata tačku } A(a, b, c) \\ 4\pi, & \text{ako } S \text{ obuhvata tačku } A(a, b, c). \end{cases}$$

396.

$$\Phi = \oiint_S \vec{A}\cdot\vec{N}dS = \oiint_S \sum_{i=1}^{n}\left(\operatorname{grad}\frac{-e_i}{4\pi r_i}\right)\cdot\vec{N}dS = \sum_{i=1}^{n}\iint_S \left(\operatorname{grad}\frac{-e_i}{4\pi r_i}\right)\cdot\vec{N}dS.$$

Kako je $\operatorname{div}\left(\operatorname{grad}\frac{-e_i}{4\pi r_i}\right) = \operatorname{div}\cdot\left(\frac{e_i}{4\pi}\frac{\vec{r}_i}{r_i^3}\right) = \frac{e_i}{4\pi}\operatorname{div}\frac{\vec{r}_i}{r_i^3} = 0,$

to je

$\oiint_S \left(\operatorname{grad}\frac{-e_i}{4\pi r_i}\right)\cdot\vec{N}dS = 0,$ ako površ S ne obuhvata tačku M_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Ako površ S obuhvata tačku M_i $(i=1, 2, \ldots, n)$, tada

$$\oiint_S \left(\operatorname{grad}\frac{-e_i}{4\pi r_i}\right)\cdot\vec{N}dS = \iint_{S_i} \frac{e_i}{4\pi}\frac{\vec{r}_i}{r_i^3}\cdot\frac{\vec{r}_i}{r_i}dS = \frac{e_i}{4\pi}\frac{1}{\varepsilon_i^2}\varepsilon_i^2 4\pi = e_i,$$

gdje je S_i: $(x-a_i)^2+(y-b_i)^2+(z-c_i)^2=\varepsilon_i^2$.

Znači, $\oiint_S \left(\operatorname{grad}\frac{-e_i}{4\pi r_i}\right)\cdot\vec{N}dS = \begin{cases} 0, & \text{ako } S \text{ ne obuhvata } M_i \\ e_i, & \text{ako } S \text{ obuhvata } M_i \quad (i=1, 2, \ldots, n). \end{cases}$

Ako površ S obuhvata upravo prvih k tačaka M_i $(i=1, 2, \ldots, k)$, tada će biti

$$\Phi = \oiint_S \vec{A} \cdot \vec{N}\, dS = \sum_{i=1}^{k} e_i .$$

Ako površ S ne obuhvata ni jednu tačku M_i, tada je

$$\Phi = \oiint_S \vec{A} \cdot \vec{N}\, dS = 0.$$

Izračunati direktno i primjenom Stoksove teoreme

397. $\oint\limits_C y dx + x^2 dy + z dz$, ako je kriva C presjek površi

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{x}{a} + \frac{y}{b}, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c} \qquad (c > 0)$$

i pozitivno orijentisana (gledano sa pozitivnog dijela x-ose).

398. $\oint\limits_C y dx + z dy + x dz$, ako je kriva C pozitivno orijentisana kružnica

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

$$x + y + z = 0$$

(posmatrajući je sa pozitivnog dijela x-ose).

399. $\oint\limits_C (y-z)\, dx + (z-x)\, dy + (x-y)\, dz$ gdje je C pozitivno orijentisana elipsa

$$x^2 + y^2 = a^2$$

$$\frac{x}{a} + \frac{z}{h} = 1 \qquad (a > 0, \quad h > 0)$$

(posmatrajući je sa pozitivnog dijela x-ose).

400. $\oint\limits_C (y^2 + z^2)\, dx + (z^2 + x^2)\, dy + (x^2 + y^2)\, dz$, gdje je C pozitivno orijentisana kriva

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2Rx$$

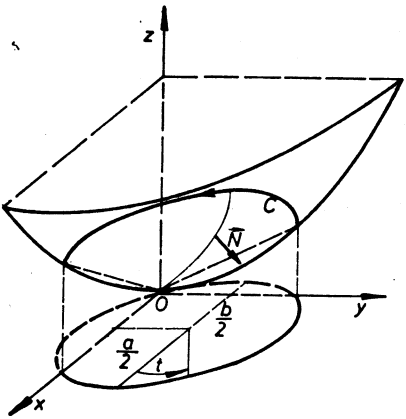
$$x^2 + y^2 = 2rx \qquad (0 < r < R, \quad z > 0)$$

(gledajući je sa pozitivnog dijela z-ose).

401. $\iint\limits_S (\nabla \times \vec{A}) \cdot \vec{N}\, dS$, ako je $\vec{A} = 2yz\vec{i} - (x + 3y - 2)\vec{j} + (x^2 + z)\vec{k}$, S dio površi cilindra $x^2 + y^2 = a^2$ iz prvog oktanta koji isijeca cilindar $x^2 + z^2 = a^2$, a $\vec{N}$ jedinični vektor vanjske normale cilindra $x^2 + y^2 = a^2$.

402. $\iint\limits_S (\nabla \times \vec{A}) \cdot \vec{N}\, dS$, ako je $\vec{A} = y\vec{i} + (x - 2\,xz)\vec{j} - xy\vec{k}$, S dio sfere $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ u I oktantu, a $\vec{N}$ jedinični vektor vanjske normale na sferi.

403. $\iint\limits_S (\nabla \times \vec{A}) \cdot \vec{N}\, dS$, ako je $\vec{A} = (x^2 + y - 4)\vec{i} + 3\,xy\vec{j} + (2xz + z^2)\vec{k}$, S dio površi paraboloida $z = 4 - (x^2 + y^2)$ iznad xOy-ravni, a $\vec{N}$ jedinični vektor normale površi S usmjeren prema gore.



Sl. 100

Rješenja:

397. Krivu C možemo predstaviti i ovako:

$$\left(\frac{x}{a} - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{b} - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \frac{z}{c}, \text{ tj. parametarski (sl. 100)}$$

$$x = a\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos t\right),$$

$$y = b\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin t\right),$$

$$z = c\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos t + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin t\right),$$

$$(0 \leqslant t \leqslant 2\,\pi).$$

a) Direktno:

$$I = \oint\limits_C y dx + x^2\, dy + z dz =$$

$$= -\int_0^{2\pi} -b\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin t\right) \cdot a\frac{1}{\sqrt{2}}\sin t dt - \int_0^{2\pi} a^2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos t\right)^2 b \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\cos t dt -$$

$$-\int_0^{2\pi} c\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos t + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin t\right) d\left[c\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos t + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin t\right)\right].$$

$$I = -ab\left[\frac{1}{2\sqrt{2}}\cos t - \frac{1}{2}\left(\frac{t}{2} - \frac{\sin 2t}{4}\right)\right] -$$

$$-\frac{a^2 b}{\sqrt{2}}\left[\frac{1}{4}\sin t + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{t}{2} - \frac{\sin 2t}{4}\right) + \frac{1}{2}\left(\sin t - \frac{\sin^3 t}{3}\right)\right]_0^{2\pi} -$$

$$-\left.\frac{c^2\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos t + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin t\right)^2}{2}\right|_0^{2\pi} = \frac{ab\pi}{2}(1 - a).$$

b) Primjenom Stoksove teoreme dobija se

$$I = \oint_C \vec{A}\, d\vec{r} = \iint_S \operatorname{rot} \vec{A} \cdot \vec{N}\, dS,$$

tj. zbog

$$\operatorname{rot} \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y & x^2 & z \end{vmatrix} = (2x-1)\vec{k},$$

$I = \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{r} = \iint_S (2x-1)\vec{k} \cdot \vec{N}\, dS = -\iint_D (2x-1)\, dx dy$, gdje je

D: $\left(\dfrac{x}{a} - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{y}{b} - \dfrac{1}{2}\right)^2 \leqslant \dfrac{1}{2}$. (Predznak — ispred posljednjeg integrala dolazi otuda što vektor normale $\vec{N}$ na S ima smjer prema dolje). Ako stavimo

$$x = a\left(\frac{1}{2} + \rho \cos\varphi\right), \quad y = b\left(\frac{1}{2} + \rho \sin\varphi\right),$$

imaćemo

$$I = -\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} (a + 2a\rho\cos\varphi - 1) \cdot ab\rho\, d\rho = \frac{ab\pi}{2}(1-a).$$

398. a) Direktno: Iz

$$z = -x - y, \quad x^2 + y^2 + x^2 + 2xy + y^2 = a^2, \text{ tj}$$

$$y_{1,2} = \frac{-x \pm \sqrt{2a^2 - 3x^2}}{2}$$

nameće se parametrizacija krive C:

$$x = \sqrt{\frac{2}{3}}\, a \cos t,$$

$$y = a\frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}} \cos t + \sin t\right),$$

$$z = a\frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}} \cos t - \sin t\right), \quad (0 \leqslant t \leqslant 2).$$

$I = \sqrt{3}\, a^2 \pi$.

b) Primjenom Stoksove teoreme dobija se

$$I = \oint \vec{A} \cdot d\vec{r} = \iint_S \operatorname{rot} \vec{A}\, d\vec{S}.$$

Kako je

$$\operatorname{rot} \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y & z & x \end{vmatrix} = -\vec{i} - \vec{j} - \vec{k},$$

$$S: \; x + y + z = 0, \qquad \vec{N} = -\frac{\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{3}},$$

$$I = -\iint_S (-\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}) \cdot \frac{\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{3}} \, dS = \sqrt{3} \iint_S dS = \sqrt{3}\, a^2 \pi.$$

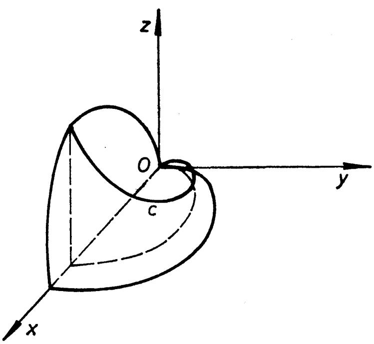
(Presjek lopte i ravni je krug radijusa a).

399. $I = 2a(a+h)\pi$.

400. a) Direktno. — Iz $(x-r)^2 + y^2 = r^2$, nameće se parametrizacija krive C: $x = r + r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $z = \sqrt{2Rr - 2r^2}\,\sqrt{1+\cos\varphi}$ $\quad (0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi)$.

$$I = \oint_C (y^2 + z^2)\, dx + (z^2 + x^2)\, dy + (x^2 + y^2)\, dz.$$

Kako je $\oint_C (y^2 + z^2) dx = 0$, $\oint_C (x^2 + y^2)\, dz = 0$, to je



Sl. 101

$$I = \int_C (z^2 + x^2)\, dy = \int_0^{2\pi} [(2Rr - 2r^2)(1 + \cos\varphi) + r^2 (1 + 2\cos\varphi + \cos^2\varphi)]\, r\cos\varphi\, d\varphi = r(2Rr - 2r^2 + 2r^2) \int_0^{2\pi} \cos^2\varphi\, d\varphi = 2Rr^2 \cdot \pi.$$

b) Primjenom Stoksove teoreme. — Kako je (sl. 101)

$$\operatorname{rot} \vec{A} = 2[(y-z)\vec{i} + (z-x)\vec{j} + (x-y)\vec{k}], \; S: \; x^2 + y^2 + z^2 = 2Rx,$$

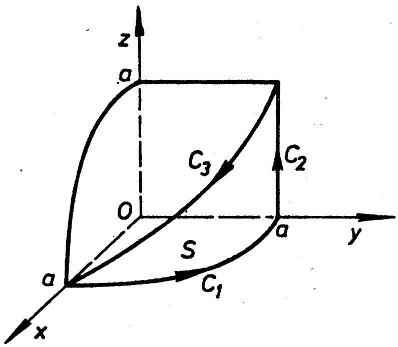
$$\vec{N} = \frac{(x-R)\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{R}, \quad \text{a} \quad D: \; (x-r)^2 + y^2 \leqslant r^2, \quad \text{imamo}$$

$$I=\oint_c \vec{A}\cdot d\vec{r}=\iint_S 2\,[(y-z)\,\vec{i}+(z-x)\,\vec{j}+(x-y)\,\vec{k}]\;\frac{(x-R)\,\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}}{R}\,dS=$$

$$=2\iint_S \frac{(Rz-Ry)}{R}\,dS=2\iint_S (z-y)\,\frac{dxdy}{\frac{z}{R}}=$$

$$=2\,R\iint_D dxdy-2\,R\iint_D \frac{y}{\sqrt{2\,Rx-x^2-y^2}}\,dxdy=2\,R\cdot r^2\,\pi.$$

(Drugi integral je jednak nuli jer je podintegrala funkcija po y neparna, a oblast integracije simetrična u odnosu na pravu $x=0$).



Sl. 102

401. a) Direktno. Imamo $S:\ x^2+y^2=a^2$,

$\vec{N}=\dfrac{x\,\vec{i}+y\,\vec{j}}{a}$, pa je, zbog

$$\nabla\times\vec{A}=(2\,y-2\,x)\,\vec{j}+(-1-2\,z)\,\vec{k},$$

$$I=\iint_S (\nabla\times\vec{A})\cdot\vec{N}\,dS=$$

$$=\iint_S [(2\,y-2\,x)\,\vec{j}+(-1-2\,z)\,\vec{k}]\cdot\frac{x\,\vec{i}+y\,\vec{j}}{a}\,dS,$$

tj.

$$I=\iint_S \frac{2\,y^2-2\,xy}{a}\,dS=\iint_S \frac{2\,y^2-2\,xy}{a}\cdot\frac{dxdz}{\frac{y}{a}}$$

$$=\iint_D (2\sqrt{a^2-x^2}-2\,x)\,dxdz=$$

$$=\int_0^a (2\sqrt{a^2-x^2}-2\,x)\,\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{2\,a^3}{3},$$

jer je

$$D: x^2+z^2\leqslant a^2\quad (x\geqslant 0,\quad z\geqslant 0),\quad (\text{sl. } 102).$$

b) Prema Stoksovoj formuli $I=\iint_S (\nabla\times\vec{A})\cdot\vec{N}\,dS=$

$$=\oint_C \vec{A}\cdot d\vec{r}=\int_C 2\,yzdx-(x+3\,y-2)\,dy+(x^2+z)\,dz=$$

$$=\int_{C_1} -(x+3\,y-2)\,dy+\int_{C_2} zdz+\int_{C_3} 2\,yzdx-$$

$$-\int_{C_3}(x+3\,y-2)\,dy+\int_{C_3} x^2\,dz+\int_{C_3} zdz,$$

jer je (vidi sliku) $C=C_1\cup C_2\cup C_3$, $C_1: z=0,\ x^2+y^2=a^2,$
$C_2: x=0,\ y=a.$

Konačno,

$$I=\int_{C_3} 2\,yzdx+\int_{C_3} x^2\,dz=\int_0^a 2\sqrt{a^2-x^2}\ \sqrt{a^2-x^2}\,dx+\int_a^0 (a^2-z^2)\,dz,$$

tj.

$$I=\frac{2\,a^3}{3}.$$

402. $I=0$. **403.** $I=-4\,\pi$.

404. Dokazati da površinski integral

$$\iint_S 4\,xyzdxdy-2\,x^2\,y\,dydz-3\,x\,z^2\,dxdz$$

ne zavisi od oblika površi S koja je po dijelovima glatka i orijentisana, već samo od orijentisane po dijelovima glatke konture C koja ograničava tu površ. Izračunati taj integral preko krivolinijskog integrala, ako je kontura C data jednačinama

$$x^2+y^2=R^2$$

$$z=xy.$$

405. Izračunati direktno i pomoću Stoksove teoreme

$I=\int_C 8\,y\,(1-x^2-z^2)^3\,dx+xy^3\,dy+\sin zdz$, ako je C kriva koja ograničava dio elipsoida $4\,x^2+y^2+4\,z^2=4$ $(x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ z\geqslant 0)$.

406. Izračunati $\int_{\widehat{AB}} (x^2-yz)\,dx+(y^2-xz)\,dy+(z^2-xy)\,dz$, gdje je $\widehat{AB}$ odsječak krive

$$x=a\cos\varphi\sqrt{1+\cos^2\varphi},\quad y=a\sin\varphi\sqrt{1+\sin^2\varphi}\,,\quad z=\frac{\varphi}{2\pi}$$

od tačke $A\,(a\sqrt{2},\ 0,\ 0)$ do tačke $B\,(a\sqrt{2},\ 0,\ 1)$.

407. Kriva C je presjek elipsoida $\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2+\left(\frac{z}{c}\right)^2=1$ i ravni

$$\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1 \quad (a>0,\ b>0,\ c>0).$$

a) Odrediti projekciju C' krive C na ravan Oxy. Pomoću jedne parametrizacije projekcije C' parametrizirati krivu C.

b) Izračunati cirkulaciju vektorskog polja $\vec{A}=(z, x, y)$ duž krive C orijentisane u smjeru u kome izabrani parametar raste.

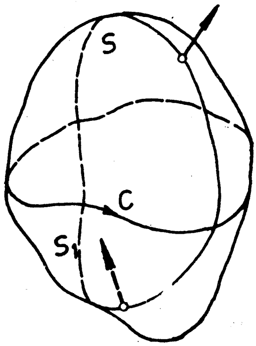
c) Rezultat dobijen pod b) provjeriti upotrebom Stoksove teoreme.

Rješenja:

404. $I=\iint\limits_S 4\,xyz\,dx\,dy-2\,x^2\,y\,dy\,dz-$

$-3\,xz^2\,dxdz$

$\vec{A}=(-2\,x^2\,y,\ -3\,xz^2,\ 4\,xyz).$



Sl. 103

Ako površ S zatvorimo nekom površi S_1 (vidi sliku 103), tada će biti

$$\Phi_S-\Phi_{S_1}=\iiint\limits_V \operatorname{div}\vec{A}\,dxdydz.$$

Kako je div $\vec{A}=-4\,xy+4xy=0$, $\Phi_S=\Phi_{S_1}$ tj. gornji integral ne zavisi od površi S, već samo od krive C koja ograničava površ S.

Zbog div $\vec{A}=0$ postoji vektor $\vec{B}=\vec{B}_1+\operatorname{grad}U$ (U je proizvoljna skalarna funkcija) takav da je

$$\vec{A}=\operatorname{rot}\vec{B}=\operatorname{rot}\vec{B}_1.$$

$\vec{B}_1$ ćemo odrediti pretpostavljajući da ima jednu komponentu jednaku nuli, recimo $R=0$:

$$\vec{B}_1=P\vec{i}+Q\vec{j}.$$

Imamo rot $\vec{B}_1=\vec{A}$, tj.

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & O \end{vmatrix}=A_x\vec{i}+A_y\vec{j}+A_z\vec{k},$$

pa je

$$-\frac{\partial Q}{\partial z}=-2\,x^2\,y,\quad \frac{\partial P}{\partial z}=-3\,x\,z^2,\quad \frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=4\,xyz.$$

Odavde se dobija

$$Q = 2x^2 yz + \varphi_1(x, y), \qquad P = -xz^3 + \varphi_2(x, y),$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 4xyz + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} = 4xyz.$$

Da i posljednja jednakost bude zadovoljena, dovoljno je uzeti $\varphi_1 = 0$ i $\varphi_2 = 0$.

Za $\vec{B}$ uzimamo najjednostavniji izraz

$$\vec{B} = -xz^3\vec{i} + 2x^2yz\vec{j} \qquad (\text{grad } U = 0).$$

Kako je $\vec{A} = \text{rot } \vec{B}$,
to je

$$I = \iint_S \vec{A} \cdot \vec{N}\, dS = \oint_C \cdot \vec{B} \cdot d\vec{r}.$$

U našem slučaju

$$C: x^2 + y^2 = R^2, \quad z = xy, \text{ tj.}$$

$$C: \begin{cases} x = r\cos t,\ y = r\sin t \\ z = r^2 \sin t \cos t\ (0 \leqslant t \leqslant 2\pi), \end{cases} \text{ dakle,}$$

$$I = \iint_S 2x^2y\, dydz - 3xz^2\, dxdz + 4xyz\, dxdy =$$

$$= \oint_C -xz^3\, dx + 2x^2yzdy =$$

$$= \int_0^{2\pi} + r^8 \cos t \sin^3 t \cos^3 t \sin t\, dt + 2\int_0^{2\pi} r^6 \cos^2 t \sin t \sin t \cos t \cos t\, dt =$$

$$= r^8 \int_0^{2\pi} \sin^4 t \cos^4 t\, dt + 2r^6 \int_0^{2\pi} \cos^4 t \sin^2 t\, dt =$$

$$= r^8 \int_0^{2\pi} \frac{\sin^4 2t}{16} dt + 2r^6 \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 2t}{4} \frac{(1+\cos 2t)}{2} \frac{d2t}{2} =$$

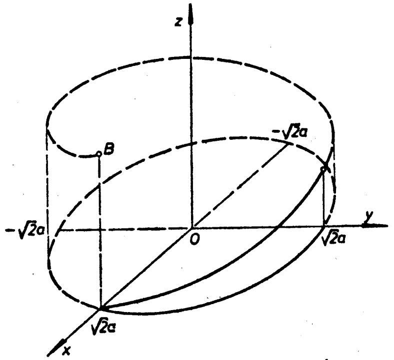
$$= \frac{r^8}{16} \int_0^{2\pi} \frac{1}{4}\left(1 - 2\cos 4t + \frac{1+\cos 8t}{2}\right) dt + \frac{2r^6}{16}\left[\frac{2t}{2} - \frac{\sin 4t}{4} + \frac{\sin^3 2t}{3}\right]_0^{2\pi} =$$

$$= \frac{r^8}{64} \cdot \frac{3}{2} \cdot 2\pi + \frac{r^6}{16} \cdot 2\pi = \left(\frac{3r^8}{64} + \frac{r^6}{8}\right) \cdot 2\pi.$$

405. $I=\frac{16}{5}$.

406. $I=\int_{\widehat{AB}}(x^2-yz)\,dx+(y^2-xz)\,dy+(z^2-xy)\,dz$, gdje je $\widehat{AB}$ luk krive

$$C: x=a\cos\varphi\sqrt{1+\cos^2\varphi},\quad y=a\sin\varphi\sqrt{1+\sin^2\varphi},\quad z=\frac{\varphi}{2\pi}.$$



Sl. 104

Kriva C je zavojna linija na cilindru $x=a\cos\varphi\sqrt{1+\cos^2\varphi}$, $y=a\sin\varphi\sqrt{1+\sin^2\varphi}$ (vidi sliku 104). Kako je

$$\operatorname{rot}\vec{A}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ x^2-yz & y^2-xz & z^2-yx\end{vmatrix}=\vec{0},$$

to iz

$$\int_{\widehat{AB}}+\int_{\overline{BA}}=\iint_S \operatorname{rot}\vec{A}\,\overline{dS}=0$$

slijedi

$$\int_{\widehat{AB}}=-\int_{\overline{BA}}=-\int_{\overline{BA}}(z^2-xy)\,dz=-\int_1^0 z^2\,dz=\frac{1}{3},$$

jer

$$BA: z=z,\quad x=\sqrt{2}\,a,\quad y=0.$$

Tu je S komad bilo koje po dijelovima glatke površi koji ima rub $\widehat{AB}$ u $\overline{BA}$.

407. a) $C': x=\frac{a}{\sqrt{2}}\cos t,\quad y=\frac{b}{2}(1+\sin t),\quad (0\leqslant t\leqslant 2\pi)$.

$$C: x=\frac{a}{\sqrt{2}}\cos t,\quad y=\frac{b}{2}(1+\sin t),\quad z=\frac{c}{2}(1-\sin t)\quad (0\leqslant t\leqslant 2\pi).$$

b) $I=\frac{a(b+c)}{2\sqrt{2}}\pi$.

408. Polazeći od definicije

$$\operatorname{div} \vec{a} = \nabla \vec{a} \tag{1}$$

pokazati da je

$$\operatorname{div} \vec{a} = \lim_{V \to 0} \frac{\oiint\limits_S \vec{a} \cdot d\vec{S}}{V}, \tag{2}$$

gdje je S rub oblasti V, a $V \to 0$ znači da se S steže na jednu tačku M u kojoj se uzima $\operatorname{div} \vec{a}$.

Rješenje: Primjenom formule Ostrogradskog dobija se

$$\oiint\limits_S \vec{a} \cdot d\vec{S} = \iiint\limits_V \operatorname{div} \vec{a} \cdot dV, \tag{3}$$

i zatim, primjenom teoreme o srednjoj vrijednosti na trostruki integral slijedi

$$\oiint\limits_S \vec{a} \cdot d\vec{S} = \operatorname{div} \vec{a}\,(M_0) \cdot V, \qquad M_0 \in V.$$

Dakle,

$$\operatorname{div} \vec{a}\,(M_0) = \frac{\oiint\limits_S \vec{a} \cdot d\vec{S}}{V}, \quad M_0 \in V. \tag{4}$$

Da bismo dobili $\operatorname{div} \vec{a}\,(M)$ u nekoj tački M oblasti V, pustićemo da se površ S steže na tačku M. Tada $M_0 \to M$, pa se iz (4) dobija (2).

Primjedba. Može se pokazati da važi i obrnuto, tj. ako se $\operatorname{div} \vec{a}$ definiše pomoću (2), tad važi (1).

409. Polazeći od definicije

$$\operatorname{grad} f = \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k} \tag{1}$$

pokazati da važi

$$\operatorname{grad} f = \lim_{V \to 0} \frac{\oiint\limits_S f\, d\vec{S}}{V}, \tag{2}$$

gdje je S rub oblasti V, a $V \to 0$ tako da se S steže na tačku M u kojoj se uzima $\operatorname{grad} f$.

Rješenje: Na osnovu (1) je

$$\iiint\limits_V \operatorname{grad} f\, dxdydz = \vec{i} \iiint\limits_V \frac{\partial f}{\partial x} dxdydz + \vec{j} \iiint\limits_V \frac{\partial f}{\partial y} dxdydz +$$

$$+\vec{k} \iiint\limits_V \frac{\partial f}{\partial z} dxdydz = \vec{i} \oiint\limits_S f\, dydz + \vec{j} \oiint\limits_S f\, dzdx + \vec{k} \oiint\limits_S f\, dxdy =$$

$$= \oiint\limits_S f\,(dydz\,\vec{i} + dzdx\,\vec{j} + dxdy\vec{k}) = \oiint\limits_S f \cdot d\vec{S}.$$

Dakle,

$$\iiint\limits_V \operatorname{grad} f \cdot dxdydz = \oiint\limits_S f \cdot dS. \tag{3}$$

S druge strane, po teoremi o srednjoj vrijednosti integrala imamo

$$\iiint\limits_V \operatorname{grad} f\, dxdydz = \operatorname{grad} f\,(M_0) \cdot V, \qquad M_0 \in V. \tag{4}$$

Iz (4) i (3) slijedi (2).

Primjedba. Jednakost (3) može se dokazati i na sljedeći način. Pomnožimo $\oiint\limits_S f\, d\vec{S}$ proizvoljnim konstantnim vektorom $\vec{c}$. Primjenom formule Ostrogradskog dobija se

$$\vec{c} \oiint\limits_S f \cdot d\vec{S} = \oiint\limits_S \vec{c} f\, d\vec{S} = \iiint\limits_V \nabla (\vec{c} \cdot f)\, dV =$$

$$= \iiint\limits_V (\nabla \vec{c}) f\, dV + \iiint\limits_V \vec{c}\,(\nabla f)\, dV = \vec{c} \iiint\limits_V (\nabla f)\, dV,$$

odakle slijedi (3), zbog proizvoljnosti vektora $\vec{c}$.

410. Pokazati da je $\oiint\limits_S (\vec{a} \cdot \vec{r})\, d\vec{S} = V \cdot \vec{a}$, pri čemu je $\vec{a} = \text{const}$, a

$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, dok je S rub oblasti V.

Rješenje. Na osnovu jednakosti (3) prethodnog zadatka važi

$$\oiint\limits_S (\vec{a} \cdot \vec{r}) \cdot d\vec{S} = \iiint\limits_V \operatorname{grad} (\vec{a} \cdot \vec{r}) \cdot dV.$$

Kako je $\operatorname{grad} (\vec{a} \cdot \vec{r}) = \vec{a}$, odatle odmah slijedi tražena jednakost.

Primjedba. Može se rezonovati i ovako:

$$\oint\!\!\!\oint_S (\vec{a}\cdot\vec{r})\,d\vec{S}=\vec{i}\oint\!\!\!\oint_S (\vec{a}\cdot\vec{r})\,dydz+\vec{j}\oint\!\!\!\oint_S (\vec{a}\cdot\vec{r})\,dzdx+\vec{k}\oint\!\!\!\oint_S (\vec{a}\cdot\vec{r})\,dxdy=$$

$$=\vec{i}\iiint_V \frac{\partial(\vec{a}\cdot\vec{r})}{\partial x}\,dV+\vec{j}\iiint_V \frac{\partial(\vec{a}\cdot\vec{r})}{\partial y}\,dV+\vec{k}\iiint_V \frac{\partial(\vec{a}\cdot\vec{r})}{\partial z}\,dV=$$

$$=(\vec{i}\cdot a_1+\vec{j}\cdot a_2+\vec{k}\cdot a_3)\cdot V=\vec{a}\cdot V.$$

411. Pokazati da je $\oint\!\!\!\oint_S f\vec{r}\times d\vec{S}=\iiint_V (\vec{r}\times\operatorname{grad} f)\,dV$, gdje je $\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$, a S rub oblasti V.

Rješenje: Množenjem konstantnim vektorom $\vec{c}$ dobija se

$$\vec{c}\oint\!\!\!\oint_S f\vec{r}\times d\vec{S}=\oint\!\!\!\oint_S f\vec{c}\,(\vec{r}\times d\vec{S}). \tag{1}$$

Primjenom pravila za mješoviti proizvod vektora iz (1) slijedi

$$\vec{c}\oint\!\!\!\oint_S f\vec{r}\times d\vec{S}=\oint\!\!\!\oint_S f(\vec{c}\times\vec{r})\cdot d\vec{S}. \tag{2}$$

Sada se može primijeniti formula Ostrogradskog. Biće

$$\vec{c}\oint\!\!\!\oint_S f\vec{r}\times d\vec{S}=\iiint_V \nabla[f\cdot(\vec{c}\times\vec{r})]\,dV. \tag{3}$$

Kako je

$$\nabla[f(\vec{c}\times\vec{r})]=(\vec{c}\times\vec{r})\operatorname{grad} f+f\nabla(\vec{c}\times\vec{r})=(\vec{c}\times\vec{r})\operatorname{grad} f-f(\vec{c}\cdot\operatorname{rot}\vec{r})=$$

$$=(\vec{c}\times\vec{r})\operatorname{grad} f=\vec{c}\cdot(\vec{r}\times\operatorname{grad} f),$$

to slijedi

$$\vec{c}\oint\!\!\!\oint_S f\vec{r}\times d\vec{S}=\vec{c}\iiint_V (\vec{v}\times\operatorname{grad} f)\,dV \tag{4}$$

i zatim tvrdnja zadatka.

412. Polazeći od definicije

$$\operatorname{rot}\vec{a}=\nabla\times\vec{a} \tag{1}$$

pokazati da je

$$\operatorname{rot}\vec{a}=\lim_{V\to 0}\frac{\oint\!\!\!\oint_S d\vec{S}\times\vec{a},}{V} \tag{2}$$

gdje je S rub oblasti V.

Rješenje: Pođimo od jednakosti

$$\iiint_V \operatorname{rot} \vec{a}\, dV = \iiint_V (\nabla \times \vec{a})\, dV =$$

$$= \iiint_V \left[\left(\frac{\partial a_3}{\partial y} - \frac{\partial a_2}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial a_1}{\partial z} - \frac{\partial a_3}{\partial x}\right)\vec{j} + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial a_2}{\partial x} - \frac{\partial a_1}{\partial y}\right)\vec{k}\right] dxdydz = \oiint_S (a_3\, dxdz - a_2\, dxdy)\,\vec{i} +$$

$$+ (a_1\, dxdy - a_3\, dydz)\,\vec{j} + (a_2\, dydz - a_1\, dxdz)\,\vec{k} =$$

$$= \oiint_S (dydz\,\vec{i} + dzdx\,\vec{j} + dxdy\,\vec{k}) \times (a_1\,\vec{i} + a_2\,\vec{j} + a_3\,\vec{k}).$$

Dakle, važi

$$\iiint_V \operatorname{rot} \vec{a} \cdot dV = \oiint_S d\vec{S} \times \vec{a}. \tag{3}$$

Jednakost (3) može se dokazati i ovako. Za proizvoljan konstantan vektor $\vec{c}$ imamo:

$$\vec{c} \cdot \oiint_S d\vec{S} \times \vec{a} = \oiint_S \vec{c} \cdot (d\vec{S} \times \vec{a}) = \oiint_S (\vec{a} \times \vec{c})\, d\vec{S} =$$

$$= \iiint_V \nabla (\vec{a} \times \vec{c})\, dV = \iiint_V \vec{c} \cdot (\nabla \times \vec{a})\, dV =$$

$$= \vec{c} \cdot \iiint_V \operatorname{rot} \vec{a} \cdot dV,$$

odakle, zbog proizvoljnosti vektora $\vec{c}$, slijedi (3).

Primjenom teoreme o srednjoj vrijednosti integrala, iz (3) dobija se

$$\operatorname{rot} \vec{a}\,(M_0) = \frac{\oiint_S d\vec{S} \times \vec{a}}{V}. \tag{4}$$

Iz (4) slijedi (2).

413. Koju osobinu mora imati $\vec{a}$ da bi za proizvoljnu zatvorenu površ S vrijedila relacija

$$\oiint_S (\vec{c} \cdot d\vec{S})\, \vec{a} = \oiint_S (\vec{a} \cdot \vec{c})\, d\vec{S}, \tag{1}$$

pri čemu je $\vec{c} \neq \vec{0}$ konstantan vektor?

Rješenje. Jednakost (1) ekvivalentna je jednakosti

$$\oiint_S [(\vec{c}\cdot d\vec{S})\cdot\vec{a}-(\vec{a}\cdot\vec{c})\cdot d\vec{S}]=0. \tag{3}$$

Na osnovu zadatka 412. iz (3) slijedi

$$\vec{c}\times\operatorname{rot}\vec{a}=\vec{0}. \tag{4}$$

Dakle, ili je rot $\vec{a}=\vec{0}$, ili je vektor rot $\vec{a}$ samo kolinearan sa vektorom $\vec{c}$. U svakom je slučaju rot $\vec{a}=\lambda\cdot\vec{c}$.

414. Izračunati (Gausov) integral:

$$G=\oiint_S \frac{\cos(\vec{r},\vec{N})}{r^2}\,d\vec{S},$$

pri čemu je $\vec{r}=\overrightarrow{AM}$, $A(a, b, c)$ fiksirana tačka, $\vec{N}$ jedinični vektor normale zatvorene površi S, $M\in S$, $r=|\vec{r}|$.

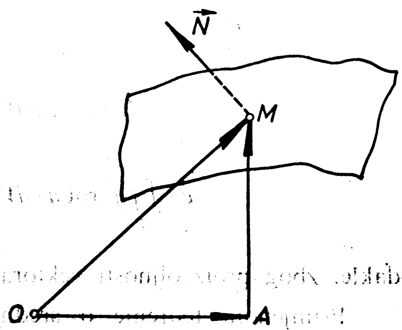
Rješenje. Neka, najprije, zatvorena površ S (čiji je dio prikazan ua sl. 105) ne obuhvata tačku A. Kako je

$$\cos(\vec{r},\ \vec{N})=\frac{\vec{r}\cdot\vec{N}}{r},$$

to je

$$G=\oiint_S \frac{\vec{r}\cdot\vec{N}}{r^3}dS=\oiint_S\frac{\vec{r}}{r^3}d\vec{S}=$$

$$=\iiint_V \nabla\left(\frac{\vec{r}}{r^3}\right)dV=\iiint_V 0\,dV=0.$$



Sl. 105

Ako zatvorena površ S obuhvata tačku A, onda uočimo zatvorenu površ S_1 koja takođe obuhvata tačku A. Primjenom formule Ostrogradskog dobija se

$$\oiint_S \frac{\cos(\vec{r},\ \vec{N})}{r^2}d\vec{S}=\oiint_{S_1}\frac{\cos(\vec{r},\ \vec{N})}{r^2}d\vec{S}.$$

Ova jednakost izražava činjenicu da integral G ne zavisi od površi S, tj. da za sve površi S koje obuhvataju tačku A ima konstantnu vrijednost.

Radi jednostavnijeg računanja izaberimo da je S sfera sa centrom u A i polupréčnika $r=1$. Tada je

$$\vec{I}=\oiint_S \frac{\vec{r}}{r^3}\times d\vec{S}=\oiint_S \frac{\vec{r}}{r^2}\times\frac{\vec{r}}{r}\,dS=\vec{0}.$$

415. Pomoću formule Ostrogradskog dokazati jednakosti:

$$\iiint_V \Delta f\,dxdydz=\oiint_S \frac{\partial f}{\partial N}dS, \qquad (1)$$

$$\iiint_V \varphi\Delta f\cdot dxdydz=-\iiint_V (\nabla f)(\nabla\varphi)\,dxdydz+\oiint_S \varphi\frac{\partial f}{\partial N}dS, \qquad (2)$$

$$\iiint_V (\varphi\Delta f-f\,\Delta\varphi)\,dxdydz=\oiint_S\left(\varphi\frac{\partial f}{\partial N}-f\frac{\partial\varphi}{\partial N}\right)dS, \qquad (3)$$

pri čemu je $\dfrac{\partial f}{\partial N}=\operatorname{grad} f\cdot\vec{N}$ izvod u pravcu vektora normale $\vec{N}$,

$$\Delta f=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=\nabla(\operatorname{grad} f),$$

a S rub oblasti V.

Relacija (3) poznata je kao (druga) Grinova formula.

Rješenje. Dokaz jednakosti (1).

$$\oiint_S \frac{\partial f}{\partial N}\,dS=\oiint_S(\operatorname{grad} f)\cdot\vec{N}\cdot dS=$$

$$=\iiint_V \nabla(\operatorname{grad} f)\,dxdydz=\iiint_V \Delta f\,dxdydz.$$

Dokaz jednakosti (2).

$$\oiint_S \varphi\frac{\partial f}{\partial N}\,dS=\oiint_S\varphi(\nabla f)\cdot\vec{N}\cdot dS=\oiint_S\varphi(\nabla f)\cdot d\vec{S}=$$

$$=\iiint_V \nabla[\varphi(\nabla f)]\,dxdydz=$$

$$=\iiint_V(\nabla\varphi)(\nabla f)\,dxdydz+\iiint_V\varphi(\Delta f)\,dxdydz.$$

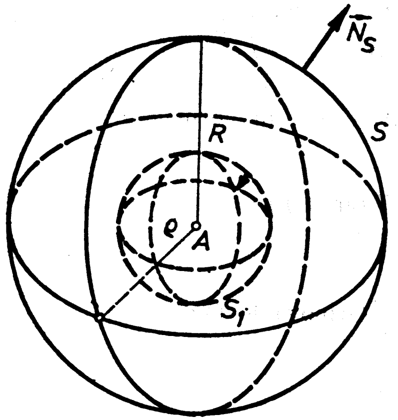
Jednakost (3) slijedi iz (2) i iz

$$\iiint_V f(\Delta\varphi)\,dxdydz=-\iiint_V(\nabla f)\cdot(\nabla\varphi)\,dxdxdz+\oiint_S f\frac{\partial\varphi}{\partial N}dS. \qquad (4)$$

416. Neka je $f(x, y, z)$ harmonijska funkcija u nekoj oblasti u kojoj se nalazi sfera S sa centrom u tački $A(a, b, c)$ i poluprečnikom R. Dokazati da je

$$f(a, b, c)=\frac{1}{4\pi R^2}\oiint_S f(x, y, z)\,dS. \tag{1}$$

Rješenje. Uočimo sferu S_1 sa centrom u A i poluprečnikom $\rho<R$ (sl. 106) i funkciju $\varphi=\frac{1}{r}$, pri čemu je $r=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}$. Funkcija φ postaje neograničena kada $r\to 0$, ali je neprekidna u oblasti V koju ograničavaju sfere S i S_1, i u toj oblasti je harmonijska funkcija, tj. važi



Sl. 106

$$\Delta\left(\frac{1}{r}\right)=0, \tag{2}$$

što se lako provjerava.

Primjenjujući Grinovu formulu na funkcije f i $\varphi=\frac{1}{r}$ u oblasti V, dobija se

$$\oiint_{S\cup(-S_1)}\left(f\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial N}-\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial N}\right)dS=0, \tag{3}$$

i zatim

$$\iint_S\left(f\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial N}-\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial N}\right)dS=\iint_{S_1}\left(f\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial N}-\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial N}\right)dS. \tag{4}$$

Kako je

$$\iint_S\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial N}dS=\frac{1}{R}\iint_S\frac{\partial f}{\partial N}dS=\frac{1}{R}\iint_S(\nabla f\cdot\vec{N})\,dS=$$

$$=\frac{1}{R}\iint_S\nabla f\,d\vec{S}=\frac{1}{R}\iiint_V\Delta f\,dxdydz=0,$$

i slično

$$\iint_{S_1}\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial N}dS=0,$$

to iz (4) slijedi

$$\iint\limits_{S} f \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial N} dS = \iint\limits_{S_1} f \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial N} dS. \tag{5}$$

Uzimajući u obzir da je

$$\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial N} = \nabla\left(\frac{1}{r}\right) \cdot \frac{\vec{r}}{r} = -\frac{1}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r} \cdot \frac{\vec{r}}{r} = -\frac{1}{r^2},$$

to (5) postaje

$$\iint\limits_{S} f \cdot \frac{1}{r^2} dS = \iint\limits_{S_1} f \frac{1}{r^2} dS, \tag{6}$$

tj.

$$\frac{1}{R^2} \iint\limits_{S} f\, dS = \frac{1}{\rho^2} \iint\limits_{S_1} f\, dS. \tag{7}$$

Na osnovu (7) zaključuje se da je

$$\frac{1}{R^2} \iint\limits_{S} f\, dS = \text{const} \tag{8}$$

za sve površi S koje obuhvataju tačku A. Odredićemo tu konstantu. Primjenom teoreme o srednjoj vrijednosti dobija se

$$\iint\limits_{S_1} f\, dS = f(P) \cdot \iint\limits_{S_1} dS = f(P) \cdot 4\rho^2 \pi, \quad P \in S_1, \tag{9}$$

odnosno

$$\frac{1}{R^2} \iint\limits_{S} f\, dS = \frac{1}{\rho^2} \iint\limits_{S_1} f\, dS = 4\pi \cdot f(P). \tag{10}$$

Puštajući da $\rho \to 0$, tj. da se sfera S_1 steže oko tačke A, iz (10) se dobija

$$\frac{1}{R^2} \iint\limits_{S} f\, dS = 4\pi \cdot \lim_{\rho \to 0} f(P), \tag{11}$$

a, kako $P \to A$ kad $\rho \to 0$, to iz (11) slijedi

$$\frac{1}{R^2} \iint\limits_{S} f\, dS = 4\pi \cdot f(A),$$

čime je dokazana jednakost (1).

417. Neka je S po dijelovima glatka jednostavno zatvorena površ orijentisana vektorom vanjske normale, $\vec{c}$ konstantan vektor, a $\vec{c}\times\vec{F}$ potencijalno vektorsko polje.

a) Dokazati da je $\oiint\limits_S \vec{F}(\vec{c}\cdot d\vec{S}) = \oiint\limits_S \vec{c}(\vec{F}\cdot d\vec{S})$;

b) Izračunati prethodne integrale, ako je

$$\vec{c}=(c_1, c_2, 0),\ \vec{F}=(x,\ y,\ -z),\ S: x^2+y^2+z^2=1.$$

c) Odrediti sve vektore $\vec{F}=(a_1 x, a_2 y, a_3 z)$ koji ispunjavaju uslov zadatka, ako je $\vec{c}=(c_1,\ c_2,\ c_3)$.

Rješenje: a) Data jednakost ekvivalentna je sa jednakošću $\oiint\limits_S (\vec{c}\times\vec{F})\times d\vec{S}=0$, a ova je ispunjena ako i samo ako za svaki konstantan vektor $\vec{b}$ vrijedi

$$\oiint\limits_S \vec{b}\cdot[(\vec{c}\times\vec{F})\times d\vec{S}]=0,\quad \text{tj.}\quad \oiint\limits_S [\vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{F})]\cdot d\vec{S}=0.$$

Poslednja jednakost je ispunjena, jer se pomoću formule Gausa-Ostrogradskog prevodi u jednakost

$$\iiint\limits_V \operatorname{div}[\vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{F})]\,dV=0,$$

a ova je sigurno tačna, zbog $\nabla\cdot[\vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{F})]=-\vec{b}\cdot(\nabla\times(\vec{c}\times\vec{F}))=0.$

b) Kako je ovdje ispunjen uslov zadatka $\nabla\times(\vec{c}\times\vec{F})=0$, dovoljno je izračunati drugi integral. Za taj integral imamo

$$\vec{c}\oiint\limits_S \vec{F}d\vec{S}=\vec{c}\iint\limits_S (2x^2+2y^2-1)\,dS=\frac{4}{3}\pi\vec{c}$$

ili

$$\vec{c}\oiint\limits_S \vec{F}d\vec{S}=\vec{c}\iiint\limits_V \operatorname{div}\vec{F}\cdot dV=\vec{c}\iiint\limits_V s\cdot dV=\frac{4}{3}\pi\vec{c}.$$

c) $\vec{c}\times\vec{F}=(a_3c_2z-a_2c_3y,\ a_1c_3x-a_3c_1z,\ a_2c_1y-a_1c_2x)$, dakle

$$\operatorname{rot}(\vec{c}\times\vec{F})=((a_2+a_3)c_1,\ (a_1+a_3)c_2,\ (a_1-a_2)c_3).$$

Prema tome vrijedi

$$c_1=0 \text{ ili } a_3=-a_2,\ c_2=0 \text{ ili } a_3=-a_1,\ c_3=0 \text{ ili } a_2=a_1.$$

Ako su, na primjer, bar dvije komponente vektora $\vec{c}$ različite od 0, tada mora biti $a_1=a_2=-a_3$, dakle $\vec{F}=a_1\cdot(x,\ y,\ -z)$.